Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2022, filière TSI

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : suites récurrentes et application
- Exercice 2 : série de Fourier de cosh(αx)
- Problème, partie 1 : résultats préliminaires
- Problème, partie 2 : équation homogène
- Problème, partie 3 : équation complète

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/tsi/2022/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵖⵍⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴰⵙⴰⵡⴰⵍ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والابتكار

ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

المدرسة الوطنية العليا للمعادن بالرباط
ⵜⵜⴰⵙⵙⵓⵔⵜ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ ⵏ ⵓⵔⵉⴱⴰⵜ
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE RABAT

وزارة الانتقـــــــال الطـــاقـــــي
Ministère de la Transition Énergétique
والتنمية المستـــدامة
et du Développement Durable
Département de la Transition Energétique قطـاع الانتقـال الطـاقـي

MINES-RABAT

CNC 2022

Concours National Commun

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Épreuve de **Mathématiques I**

Filière : **TSI**

Durée **4 heures**

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice 1

Étude de suites récurrentes et application

(Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, on considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée du couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$$

1.1. Première méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire ses valeurs propres.

1.1.2. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.3. Montrer que la matrice P est inversible et calculer le produit matriciel $D = P^{-1}AP$.

1.1.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis en déduire les expressions des coefficients de la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1.1.5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1.1.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Deuxième méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

1.2.2. Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles, puis en donner la dimension et une base.

1.2.3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

1.3. Soit ρ un réel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{\rho^n}{n!} z^n$, puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

1.4. Pour chacune des séries entières $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{v_n}{n!} z^n$, déterminer le rayon convergence puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

Développement d'une fonction en série de Fourier
Application au calcul de sommes de séries numériques

Dans cet exercice , les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont notées respectivement cosh *et* sinh. *On rappelle que :*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi-$périodique et telle que $f(x) = \cosh(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2.1. Montrer que la fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2.2. Montrer que la fonction f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On note $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ les suites des coefficients de Fourier de la fonction f.

2.3. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = 0$, puis montrer que $a_0 = \dfrac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$.

2.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant deux intégrations par partie, montrer que

$$a_n = (-1)^n \frac{2\alpha \sinh(\alpha\pi)}{\pi(n^2 + \alpha^2)}.$$

2.5. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sinh(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + \alpha^2}.$$

2.6. Justifier la convergence et calculer les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+\alpha^2}$.

2.7. Justifier la convergence et calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^2+\alpha^2)^2}$.

Problème

Étude d'une équation différentielle linéaire

Dans ce problème, on s'interesse à la résolution de l'équation différentielle linéaire

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1 + x^2)^2 \ln x. \tag{1}$$

Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.

1ère Partie

Résultats préliminaires utiles

1.1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

1.2. En déduire les primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

1.3. Donner une primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x \ln x$.

1.4. Donner une primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto (1 - x^2) \ln x$.

2ème Partie

Résolution de l'équation sans second membre

On s'interesse ici à l'équation différentielle linéaire homogène (2) suivante associée à (1) :

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{2}$$

2.1. Déterminer $\alpha > 0$ tel que la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ soit solution de l'équation différentielle homogène (2).

2.2. Soit $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable ; on pose $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$, $x \in]0,+\infty[$.

2.2.1. Vérifier que la fonction ψ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2.2.2. Montrer que la fonction φ est une solution de (2) si, et seulement si, la fonction ψ' est solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$z' + \frac{2}{x(x^2+1)}\, z = 0. \tag{3}$$

2.3. Résoudre l'équation différentielle (3) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2.4. Préciser l'ensemble Σ_0 des solutions, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (2).

3ème Partie

Résolution de l'équation complète

On note Σ l'ensemble des solutions, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (1).

3.1. On suppose que l'on connaît une solution φ_0 de l'équation différentielle (1). Montrer que

$$\Sigma = \{\varphi_0 + g \,;\, g \in \Sigma_0\}.$$

3.2. Recherche d'une telle solution particulière φ_0

On cherche une solution particulière φ_0 de l'équation différentielle (1) sous la forme

$$\varphi_0 : x \longmapsto x\,\lambda(x) + (x^2-1)\,\mu(x),$$

où λ et μ sont des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad x\,\lambda'(x) + (x^2-1)\,\mu'(x) = 0. \tag{4}$$

3.2.1. Montrer que la fonction φ_0 est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée φ_0' à l'aide des fonctions λ et μ.

3.2.2. En déduire que la fonction φ_0 est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde φ_0'' à l'aide des fonctions λ', μ et μ'.

3.2.3. Montrer que la fonction φ_0 est solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (1) si, et seulement si,

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) + 2x\,\mu'(x) = (1+x^2)\ln x. \tag{5}$$

3.2.4. Soit $x > 0$. Déterminer les expressions des réels $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ en résolvant le système linéaire d'équations (4) et (5), d'inconnues $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$.

3.2.5. En déduire les expressions des fonctions λ et μ.

3.3. Préciser alors les solutions, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (1).

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Équations différentielles linéaires
- Nombres réels et suites numériques
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/tsi