Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2024, filière TSI

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème, partie 1 : propriétés de F_λ
- Problème, partie 2 : calcul de l'intégrale de sin(λu)/u
- Problème, partie 3 : construction de probabilités

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/tsi/2024/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵣⵣⵉⵡⵉⵏ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ
ⵜⵣⵣⵉⵡⵉⵏ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ ⴷ ⵜⵙⵙⵏⴰⵙⵜ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والابتكار

Royaume du Maroc
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

esith
Constructeur de compétences

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2024

Épreuve de **Mathématiques I**

Filières : **TSI**

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte **4 pages** au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de tout document et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est **interdit**

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice

(Noté 4 points sur 20)

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

1. a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = 1$.

   b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $x^n e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A,
$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}dx = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}dx$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n = n!$.

Problème

Pour tout réel strictement positif λ, on considère la fonction F_λ définie par,
$$F_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{x+t}dt$$

Dans tout le problème λ est un réel strictement positif.

Partie 1 : Quelques propriétés de la fonction F_λ

On considère les deux fonctions φ_λ et ψ_λ définies sur $]0,+\infty[$ par,
$$\varphi_\lambda(x) = \int_1^x \frac{\sin \lambda u}{u}du \quad \text{et} \quad \psi_\lambda(x) = \int_1^x \frac{\cos \lambda u}{u}du$$

1. On considère la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1,\ w_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\sin \lambda u}{u} du$.

   a) Vérifier que $\forall n \geq 1,\ w_n = \varphi_\lambda(n+1) - \varphi_\lambda(n)$.

   b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2023} w_k = \varphi_\lambda(2024)$.

   c) En déduire que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{2023} w_k\right| \leq \ln(2024)$.

2. a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout réel $x \in]0,+\infty[$,

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{-\cos(\lambda x)}{\lambda x} + \frac{\cos\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_1^x \frac{\cos \lambda u}{u^2} du$$

   b) i) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-\cos(\lambda x)}{\lambda x} = 0$.

   ii) Montrer que, pour tout réel $u \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\cos \lambda u}{u^2}\right| \leq \dfrac{1}{u^2}$.

   iii) Justifier que φ_λ admet la limite $S_\lambda = \dfrac{\cos\lambda}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos \lambda u}{u^2} du$, quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer, en utilisant une procédure comme dans la question précédente, que ψ_λ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, qu'on notera C_λ.

4. Montrer que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos \lambda u}{u} du$ sont convergentes et que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du = S_\lambda - \varphi_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\cos \lambda u}{u} du = C_\lambda - \psi_\lambda(x)$$

5. a) Montrer que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ et pour tout réel $T \in]0,+\infty[$,

$$\int_0^T \frac{\sin \lambda t}{x+t} dt = \cos(\lambda x)\int_x^{x+T} \frac{\sin \lambda u}{u} du - \sin(\lambda x)\int_x^{x+T} \frac{\cos \lambda u}{u} du$$

   b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{x+t} dt$ est convergente et que

$$F_\lambda(x) = \cos(\lambda x)\Big(S_\lambda - \varphi_\lambda(x)\Big) - \sin(\lambda x)\Big(C_\lambda - \psi_\lambda(x)\Big)$$

6. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_\lambda(x) = 0$.

7. a) Justifier que F_λ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et et déterminer sa dérivée F'_λ.

   b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F'_\lambda(x) = 0$.

8. Montrer que F_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa dérivée seconde F''_λ.

9. Vérifier que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $F''_\lambda(x) + \lambda^2 F_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{x}$.

10. On considère l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$: $\quad (\mathcal{E}_\lambda) \quad y'' + \lambda^2 y = \dfrac{\lambda}{x}$

    a) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : $\quad (\mathcal{EH}_\lambda) \quad y'' + \lambda^2 y = 0$

    b) En déduire les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

11. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du$ est une intégrale convergente.

12. a) Montrer que, pour tout $x \in]0, \frac{1}{\lambda}]$, $0 \leq \sin(\lambda x) \displaystyle\int_x^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\cos \lambda u}{u} du \leq -\sin(\lambda x)\Big(\ln(\lambda) + \ln(x)\Big)$.

    b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \Big(\sin(\lambda x) \int_x^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\cos \lambda u}{u} du\Big)$.

13. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du$.

Partie 2 : Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du$

1. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{1+t^2} e^{-\lambda x t} dt$ est une intégrale convergente.
   Ainsi, on pose pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in]0, +\infty[$,

$$A_{(n,\lambda)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{1+t^2} e^{-\lambda x t} dt$$

2. a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $e^{-\lambda\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\lambda x t}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt$.

   b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} A_{(0,\lambda)}(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel u, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ et pour tout h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$,

$$\Big|\frac{A_{(n,\lambda)}(x+h) - A_{(n,\lambda)}(x)}{h} + A_{(n+1,\lambda)}(x)\Big| \leq \frac{|h|}{2} A_{(n+2,\lambda)}\Big(\frac{x}{2}\Big)$$

5. Montrer que, pour tout enlier naturel n, $A_{n,\lambda}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad A'_{(n,\lambda)}(x) = -A_{(n+1,\lambda)}(x)$$

6. En déduire que la fonction $A_{(0,\lambda)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad A''_{(0,\lambda)}(x) + \lambda^2 A_{(0,\lambda)}(x) = \frac{\lambda}{x}$$

7. Soit n un entier naturel. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

   a) Montrer que pour tout réel strictement positif x, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda t)^n e^{-\lambda x t} dt$ converge et à l'aide d'un changement de variable, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda t)^n e^{-\lambda x t} dt = \frac{n!}{\lambda x^{n+1}}$.

   b) Montrer que pour tout réel strictement positif x,

$$0 \leq A_{(n,\lambda)}(x) \leq \int_0^{+\infty} (\lambda t)^n e^{-\lambda x t} dt$$

c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} A_{(n,\lambda)}(x) = 0$ puis que $\lim_{x\to+\infty} A'_{(n,\lambda)}(x) = 0$.

8. On considère la fonction H_λ définie sur $]0,+\infty[$ par $H_\lambda(x) = F_\lambda(x) - A_{(0,\lambda)}(x)$.

a) Justifier qu'il existe deux réels α et β tels que $\forall x \in]0,+\infty[$, $H_\lambda(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$.

b) Calculer pour tout réel x de $]0,+\infty[$, l'expression $(H_\lambda(x))^2 + (H'_\lambda(x))^2$ en fonction de α et β.

c) En déduire que $F_\lambda = A_{(0,\lambda)}$.

9. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du$.

Partie 3 : Exemples de construction de probabilités

On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des points de discontinuité de f est une partie finie de $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1. Soit α un nombre réel, on pose pour tout entier naturel k, $v_k = A''_{(0,e^{-\alpha})}(k!) + e^{-2\alpha}A_{(0,e^{-\alpha})}(k!)$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. À quelle condition sur α, il existe une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout k de $\mathbb{N}$, $P(X = k) = v_k$? Justifier votre réponse.

2. Pour tout réel strictement positif x, on considère la fonction $g_{(x,\lambda)}$ définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$g_{(x,\lambda)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{A_{(0,\lambda)}(x)} \cdot \left(\dfrac{e^{-\lambda x t}}{1+t^2}\right) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que $g_{(x,\lambda)}$ est une densité de probabilité. Soit $X_{(x,\lambda)}$ une variable aléatoire de densité $g_{(x,\lambda)}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Montrer que $X_{(x,\lambda)}$ admet une espérance $E(X_{(x,\lambda)})$ et déterminer sa valeur en fonction de $A_{(0,\lambda)}(x)$, $A'_{(0,\lambda)}(x)$ et λ.

c) Montrer que la variable aléatoire $X_{(x,\lambda)}$ admet un moment d'ordre 2 et déterminer la valeur de $E\left((X_{(x,\lambda)})^2\right)$ en fonction de $A_{(0,\lambda)}(x)$, $A''_{(0,\lambda)}(x)$ et λ.

d) Montrer que la variance de la variable aléatoire $X_{(x,\lambda)}$ est $V(X_{(x,\lambda)}) = \dfrac{1}{\lambda^2}\left(\dfrac{A'_{(0,\lambda)}}{A_{(0,\lambda)}}\right)'(x)$.

e) Dans cette question, on note $B_{(0,\lambda)}$ la restriction de $A_{(0,\lambda)}$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2\lambda}\right]$. Déterminer $B_{(0,\lambda)}$ tel que, pour tout réel $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2\lambda}\right]$, $V(X_{(x,\lambda)}) = \sin(\lambda x)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Équations différentielles linéaires
- Intégration sur un intervalle quelconque

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/tsi