Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2024, filière TSI

Mathématiques II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème, partie 1 : exemples de matrices nilpotentes
- Problème, partie 2 : noyaux itérés
- Problème, partie 3 : nilpotents de rang n-1
- Problème, partie 4 : cycles
- Problème, partie 5 : dimension maximale

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/tsi/2024/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et par I_2 la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a) Vérifier que $PQ = I_2$.
   b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

2. On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.
   b) Montrer que v est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre β correspondante.
   c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.
   c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = I$ et pour tout entier naturel k,

$f^{k+1} = f^k \circ f$ où I désigne l'application identité de E.
On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E. le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

Partie 1 : Exemples des matrices nilpotentes

1. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = C + {}^tC$, où ${}^tC$ désigne la transposée de C.

   a) Justifier que C admet une seule valeur propre λ à déterminer.

   b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre λ.

   c) Montrer que $L^2 \in \text{Vect}(I_3, L)$.

   d) Déterminer les valeurs propres de L.

   e) Montrer que L n'est pas nilpotente.

2. Dans cette question, on prend M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   a) Montrer que si $\text{rang}(M) = 1$ alors $M^2 = \text{tr}(M)M$.

   b) Montrer que si M est une matrice non nulle et nilpotente alors $\text{rang}(M) = 1$.

   c) En déduire l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie 2 : Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k, $\mathcal{N}_k = \ker(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.

4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.

5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$.

6. On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f à $\mathcal{I}_k$.

   a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\ker(f) \cap \mathcal{I}_k)$.

   b) En déduire que la suite $\left(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 3 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U.

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

   a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.

   b) Montrer que $\ker(v) \subset \ker(u^s)$.

   c) Montrer que $\dim(\ker(u^{r+s})) \leq \dim(\ker(u^r)) + \dim(\ker(u^s))$.

d) En déduire que pour tout entier naturel i, $\dim(\ker(u^i)) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\ker(u^i)) = i$.

b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.

c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = \Big(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e)\Big)$ soit une base de E.

d) Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.

3. Montrer que deux matrices nilpotentes de rang $n-1$ sont semblables.

Partie 4 : Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $\Big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\Big)$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $\Big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\Big)$ est un $p-$cycle de f.

1. Soit $\Big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\Big)$ un $p-$cycle de f.

a) Montrer que $f^p = I$.

b) Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \Big\{k \in \mathbb{N}^* \mid \Big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\Big) \text{ est une famille libre}\Big\}$ admet un maximum noté γ.

c) i) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}\Big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0)\Big)$.

ii) Montrer que $\gamma = n$.

2. Soit $B_{x_0} = \Big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\Big)$ un $n-$cycle de f.

a) Justifier que B_{x_0} est une base de E.

b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0}.

c) On pose $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{w}^k \\ \overline{w}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{w}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{w}$ désigne le conjugué de w.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{w}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M\overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1}.

4. Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que H est diagonalisable.

   b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.

3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ telle que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

5. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/tsi