Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2025, filière TSI

Mathématiques II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème, partie 1 : préliminaires
- Problème, partie 2 : distance aux matrices symétriques et antisymétriques
- Problème, partie 3 : la valeur absolue de la trace

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Seule version trouvée : une photo du sujet officiel posé sur une table, un peu de travers et ombrée, où un lecteur a coché ou marqué au stylo plusieurs questions des pages 2 à 4 ; l'énoncé reste entièrement lisible.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/tsi/2025/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On considère les matrices : $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on pose $\text{Vect}(u, v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par u et v.

1. On pose $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 1)$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x - y = 0\}$.
   a) Vérifier que $F = \text{Vect}(f_1)$.
   b) Montrer que la famille (f_1, f_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. a) Déterminer les deux réels α et β tels que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer qu'il existe une matrice diagonale D à déterminer, tel que $A = PDP^{-1}$.
3. a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   b) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$.
   c) Vérifier que $P\left(\frac{1}{2}(2I - P)\right) = I$ et en déduire P^{-1} l'inverse de la matrice P.
   d) Vérifier que $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix}$.
   e) En déduire l'expression de A^n en fonction de n sous la forme d'un tableau.

Problème

On désigne par n un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ le polynôme caractéristique de M. On note ${}^tM$ la matrice transposée de la matrice M et $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice carrée M. On rappelle que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

On note $diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre.

On rappelle que deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PNP^{-1}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^tM = M$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ${}^tM = -M$.

$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Le problème traite des propriétés et des applications qui sont autour de la notion de trace.

Partie 1 : Préliminaires

On rappelle que si, $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $MN = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, avec pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j}$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$, est linéaire.

2. Soient $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   a) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{l,k}n_{k,l}$.

   b) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

   c) Montrer que si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(N)$.

3. On considère l'ensemble $F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M \text{ est diagonale et } \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}$.

   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   ✱b) Déterminer la dimension de F.

   ✱c) En déduire que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $G = PFP^{-1} = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\right\}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \quad X \mapsto X + (\mathrm{Tr}(X))A$$

   a) Vérifier que ϕ_A est une application linéaire.

   Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(\star) \qquad \phi_A(X) = B$$

   b) On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.

      i) On suppose que M est une solution de l'équation matricielle $(\star)$. Déterminer $\mathrm{Tr}(M)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de $\mathrm{Tr}(B)$.

ii) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $(\star)$.

iii) En déduire que ϕ_A est un automorphisme d'espaces vectoriels.

c) On suppose maintenant que $\mathrm{Tr}(A) = -1$.

i) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, selon les valeurs de $\mathrm{Tr}(B)$, l'équation matricielle $(\star)$.

ii) Montrer que ϕ_A est un projecteur sur un sous-espace vectoriel F_1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à un sous-espace vectoriel F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer F_1 et F_2.

Partie 2 : La distance d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

1. a) Vérifier que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $\mathrm{Tr}({}^tMM) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{k,l}^2$.

b) En déduire que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $\mathrm{Tr}({}^tMM) = 0$ alors $M = 0$.

c) Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On associe à ce produit scalaire la norme définie comme suit, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sqrt{(M|M)}$.

2. a) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

c) Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d\Big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\Big) = \left\|\frac{1}{2}\Big(M - {}^tM\Big)\right\|$.

d) Déterminer, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d\Big(M, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\Big)$.

3. On suppose dans cette question que $n \geq 2$.
Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $d\Big(B, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\Big) = 2$ et $d\Big(B, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\Big) = 3$. Déterminer $\|B\|$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $d\Big(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\Big)$.

b) Déterminer $d\Big(A, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})\Big)$.

Partie 3 : La valeur absolue de la trace comme étant une "fonction génératrice"

Dans cette partie, on note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n^2 et que sa base canonique est $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1. Pour tous entiers h et k tels que $1 \leq h, k \leq n$, on désigne par $\delta_{h,k}$ le symbole de Kronecker qui est défini par $\delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k \\ 0 & \text{si } h \neq k \end{cases}$. On rappelle que pour tous entiers naturels i, j, k, l tels que $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
Une application q de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^+$ est dite semi-norme sur $\mathcal{E}$, si elle vérifie :

- $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda M) = |\lambda| q(M)$.
- $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(M + N) \leq q(M) + q(N)$.

On dit qu'une semi-norme q sur $\mathcal{E}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si $\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2$, $q(MN) = q(NM)$.

1. **Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.**

   a) Montrer que $q(O) = 0$, où O est la matrice nulle, et que pour tout M de $\mathcal{E}$, $q(-M) = q(M)$.

   b) Montrer que pour tout (M,N) de $\mathcal{E}^2$, $\big|q(M) - q(N)\big| \leq q(M+N)$.

   c) Montrer que pour tout (M,N) de $\mathcal{E}^2$, si $q(N) = 0$ alors $q(M+N) = q(M)$.

2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\operatorname{Tr}(M)|$.
   Montrer que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
   Dans les questions 3. et 4. de cette partie, on suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ telles que,

$$A = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \text{ et } B = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1}$$

   a) Montrer que $AB = \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\Big) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1}$.

   b) Montrer que $BA = \sum_{h=1}^{n} \Big(\alpha_h \sum_{j=1}^{n} E_{h,j}\Big)$.

4. **Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.**

   Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.

   a) Montrer que pour tous entiers distincts i et j tels que $1 \leq i,j \leq n$, $q(E_{i,j}) = 0$, (on pourra utiliser le fait que $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$).

   b) En déduire que $q\Big(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1} E_{i,1}\Big) = 0$.

   c) Vérifier que $q(M) = q\Big(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i}\Big)$.

   d) Montrer, en prenant des valeurs précises pour $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ qui définissent la matrice B, que $q(M) = q(BA)$.

   e) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $q = \alpha f$.

5. Dans le cas où $n = 1$, le résultat démontré ci-dessus reste-t-il valable? justifier votre réponse.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/tsi