Concours e3a-Polytech, France

Session 2024, filière MP

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : partie entière d'une variable géométrique
- Exercice 2 : série entière des cos(n)/n
- Exercice 3 : matrice A telle que A^T = 3A^2 - A - I_n
- Exercice 4 : produit de convolution

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/e3a/mp/2024/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leqslant x < k+1.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor.$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2,2]$.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit k un entier naturel non nul.
   Écrire l'événement $(Y=k)$ à l'aide d'événements $(X=j)$ où j est un entier naturel non nul.
4. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 2

1. **Question préliminaire**
   En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geqslant 1$.
3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
4. En déduire la valeur de R.
   On note alors, pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.
5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} x^n$ où i désigne le nombre complexe usuel tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.
7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul. On considère une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top BY$ pour un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que l'on a : $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.

4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.

5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.

6. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

7. La matrice A est-elle inversible ?

8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.
Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.
On appelle $\mathscr{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,4]\!]^2,\quad L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

10.1. Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

10.2. Vérifier que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$, . Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathscr{L}$.

11. Étude des puissances de A

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathscr{L}$.

11.1.2. En déduire une expression de A^k.

11.2. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.
Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

EXERCICE 4

Questions préliminaires

1. Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J.

2. Démontrer qu'une fonction $k-$lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur cet intervalle.

*****

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que : $\forall\, g \in F,\ \|g\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\forall\, f \in E,\ \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E.

Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3. Montrer que la fonction :

$$x \longmapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $f \star g = g \star f$.

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5.1. Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.

5.2. La fonction f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

6. Étude de $\mathbf{f_1 \star g}$

6.1. Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6.2. Si g est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

6.3. Démontrer que pour tout x réel :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

6.4. Si g est continue sur $\mathbb{R}$, prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

7. Étude de $\mathbf{f_1 \star f_1}$

7.1. Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.

7.2. Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x.

7.3. Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.

7.4. La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

8. Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha}\, f_1\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.

8.2. Vérifier que l'on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

8.3. Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\lim\limits_{\alpha\to 0}(h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée

9.1. Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leqslant \|g\|_1\, \|h\|_\infty$.

9.2. Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|.\|_\infty)$ qui à tout h associe $h \star g$ est continu.

9.3. En déduire une majoration de $|||\Phi|||$ (norme subordonnée de Φ).

10. On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :

$$\exists A > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, x \ \text{vérifiant}\ |x| \geqslant A,\ \ f(x) = 0$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1095 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Nombres complexes et trigonométrie
- Séries numériques et vectorielles
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Topologie des espaces vectoriels normés
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Limites et continuité
- Dérivabilité et convexité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/e3a/mp