Concours e3a-Polytech, France

Session 2026, filière MP

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : opérateur de translation sur C_(n-1)[X]
- Exercice 2 : intégrale de sin(at)/(e^t - 1) et fonction ζ
- Exercice 3 : fonction associée à une variable aléatoire finie

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/e3a/mp/2026/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.
On rappelle que $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients complexes.

Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

Pour tout endomorphisme v de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et tout entier naturel m, on rappelle que : $v^0 = \mathrm{Id}$ où Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et lorsque m est non nul, $v^m = v \circ v^{m-1}$.

On considère l'application u définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ u(P) = Q \ \text{ où } \ Q(X) = P(X+1).$$

1. Étude de u

1.1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

1.2. Soit $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_{n-1})$ la base canonique ordonnée de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, c'est à dire :

$$\forall\, j \in [\![0, n-1]\!],\ P_j(X) = X^j.$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer l'expression de $u(P_j)$ dans la base $\mathscr{B}$.

1.3. Déterminer alors la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.
On fera clairement apparaître sur la copie les deux premières colonnes ainsi que la k-ième colonne de la matrice M pour un entier naturel $k \in [\![3, n-2]\!]$.

1.4. Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de l'endomorphisme u.

1.5. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

1.6. Justifier que l'endomorphisme u est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et préciser u^{-1}.

1.7. Déterminer M^{-1}.

1.8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer u^k.

2. On note $\Delta = u - \mathrm{Id}$.

2.1. Montrer que Δ est nilpotent avec : $\Delta^n = 0$.

2.2. L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

3. Démontrer qu'il existe des entiers relatifs $(a_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]} \in \mathbb{Z}^n$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ \ P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, P(X+k) = 0.$$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, a désigne un nombre réel.

Pour tout réel $s > 1$, on appelle $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et l'on rappelle que : $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2 + a^2}$.

2. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

3. Prouver que, pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}$.

4. Prouver que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin(at))\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{a^2 + k^2}$.

5. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}$.

On pourra utiliser, en la démontrant, l'inégalité valable pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

6. Déterminer : $\displaystyle\lim_{a \to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}$.

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

7. Développement en série entière de la fonction $H : a \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$

7.1. Prouver que :

$$\forall\, a \in]-1, 1[,\ \forall\, k \geqslant 1,\ \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n}.$$

7.2. Démontrer alors que :

$$\forall\, a \in]-1, 1[,\ H(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \zeta(2n+2)\, a^{2n+1}.$$

7.3. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

7.4. Déterminer $H^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

8. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

9. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^1 t^p\, \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

10. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer I_p.

11. Prouver que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$$

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

12. Déterminer enfin la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soient a un réel non nul et n un entier naturel non nul, écrire le développement limité en 0 des fonctions :

- $t \mapsto \mathrm{e}^{a\,t}$ à l'ordre n,
- $t \mapsto \ln(1 + a\,t)$ à l'ordre 2.

* * * * *

Pour X une variable aléatoire discrète finie, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note $(x_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ avec $0 \leqslant x_1 < \cdots < x_k$, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1, les valeurs prises par la variable aléatoire X avec une probabilité non nulle. On pose :

$$\forall\, i \in [\![1,k]\!],\ \ \mathbb{P}(X = x_i) = p_i > 0.$$

On définit alors l'application Φ_X de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*,\ \ \Phi_X(t) = \frac{1}{t}\,\ln\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\,\mathrm{e}^{x_i\,t}\right).$$

2. Étude d'exemples

2.1. Déterminer Φ_X si X est une variable aléatoire certaine à valeur dans $\mathbb{R}_+$.

2.2. Soit Z une variable aléatoire telle que :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}.$$

2.2.1. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\Phi_Z(t)$.

2.2.2. Montrer que Φ_Z peut être prolongée en une fonction $\tilde{\Phi}_Z$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Étude générale. On suppose pour la suite que $k \geqslant 2$.

3.1. Déterminer un développement limité de Φ_X à l'ordre 1 en 0.

3.2. En déduire que Φ_X peut être prolongée en une fonction $\tilde{\Phi}_X$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.3. Montrer que $\tilde{\Phi}_X(0)$ est égal à $\mathbb{E}(X)$, l'espérance de la variable aléatoire X.

3.4. Reconnaître $\tilde{\Phi}'_X(0)$.

3.5. Déterminer les limites de $\tilde{\Phi}_X$ en $+\infty$ et $-\infty$.

3.6. La fonction $\tilde{\Phi}_X$ peut-elle être impaire ? On justifiera soigneusement la réponse proposée.

4. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une relation entre $\Phi_X(t)$ et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\,X})$, espérance de la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\,X}$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes finies, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et indépendantes. Trouver une relation entre Φ_{X+Y}, Φ_X et Φ_Y.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1006 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Séries numériques et vectorielles
- Dérivabilité et convexité
- Limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/e3a/mp