Concours e3a-Polytech, France

Session 2024, filière MPI

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : un opérateur intégral sur les fonctions bornées
- Exercice 2 : polynômes et cercle unité
- Exercice 3 : nombre de cases non vides
- Exercice 4 : matrices équitables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/e3a/mpi/2024/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
On note, pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup_{\mathbb{R}}|f|$.

Questions de cours

1. Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

2. En déduire le tableau des variations de la fonction arctan ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaître sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.

3. Justifier que arctan est élément de E et donner $N_0(\arctan)$.

4. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan(v(t))$.
On rappelle que la dérivée de la composée de deux fonctions u et v dérivables est la fonction définie par $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ sur un intervalle correctement choisi.

5. Déterminer une expression simple de la fonction : $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.

*****

6. Soit f une fonction de E.

6.1. Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6.2. On pose, pour tout réel x :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E.

6.3. Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.

7. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E.

8. Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

9. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h.

9.1. Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}$.

9.2. Montrer que h appartient à E.

10. Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

10.1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

10.2. Pour tout réel x strictement positif, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.

10.3. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

10.4. Une autre expression de g′

10.4.1. On fixe x, réel de $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F(T) = \dfrac{1}{(1+x^2\,T)(1+T)}$.

10.4.2. Montrer que sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

10.4.3. Donner alors l'expression de g' sur $]0,+\infty[$.

10.5. Donner le tableau des variations et l'allure de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}$.
On précisera ses éventuelles asymptotes et son comportement au voisinage de 0.

EXERCICE 2

Notations pour l'exercice :

- i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Pour tout entier naturel non nul n, on notera $E_n = \mathbb{C}_n[X]$, le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Questions préliminaires

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ ainsi $f = g + \mathrm{i}h$.
Montrer que $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'on a : $\forall z \in \mathbb{U},\ P(z) = 0$.
Justifier que P est le polynôme nul.

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

4. Soient $P = 1 + \mathrm{i}X$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}$.

5. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que la trace de la matrice A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

*****

Soit n un entier naturel non nul.

6. Pour tout couple (P,Q) d'éléments de E_n, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})}\,Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

6.1. Soient k et ℓ deux entiers naturels de $[\![0,n]\!]$. Évaluer $\varphi(X^k, X^\ell)$.

6.2. Soient $a \in \mathbb{C}$ et P, Q, R trois éléments de E_n. Montrer que l'on a :

- $\varphi(aP+Q,R) = \overline{a}\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$
- $\varphi(P,aQ+R) = a\,\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)$
- $\varphi(Q,P) = \overline{\varphi(P,Q)}$.

6.3. Soit $P \in E_n$. Montrer que $\varphi(P, P)$ est un réel positif ou nul.

6.4. Soit $P \in E_n$. Prouver l'équivalence : $\varphi(P, P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

6.5. Soit Q_0 un polynôme de E_n avec $Q_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $M = \sup_{z \in \mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1. Calculer $\varphi(Q_0, Q_0)$ à l'aide des coefficients de Q_0.
*On pourra utiliser les questions **6.2** et **6.1**.*

6.5.2. Démontrer que $M \geqslant 1$.

6.5.3. Prouver que $M = 1$ si, et seulement si, $Q_0 = X^n$.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit $(u)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1.1. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

1.2. Préciser le comportement de u à l'infini.

*****

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.
Chaque boule a la probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.
On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geq 2$.

4. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.

5. Calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$.
On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$ on a :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N}\mathbb{P}(T_n = k - 1).$$

7. On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k.$$

7.1. Montrer que $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k$.

7.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + x\, G_n(x).$$

7.3. En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}\,(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}\,(T_n) + 1.$$

7.4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}\,(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

7.5. Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i$ème case est pleine, 0 sinon.

EXERCICE 4

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que A est équitable si :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, a_{ij} = a_{ik}a_{kj}.$$

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.

2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles : A est équitable et $-A$ est équitable.

3. Montrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.

4. On suppose que A est équitable, montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ii} = a_{jj}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, calculer a_{kk}.

6. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.

7. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \neq 0$.

8. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer a_{ij} à l'aide de a_{i1} et a_{j1}.

9. Quelques résultats remarquables

9.1. Montrer que A est de rang 1.

9.2. Calculer A^2.

9.3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

9.4. Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

9.5. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

10. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.

12. Si G est un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.

13. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1125 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Nombres complexes et trigonométrie
- Suites récurrentes
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Structures algébriques usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/e3a/mpi