Concours e3a-Polytech, France

Session 2025, filière MPI

Physique-chimie

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : se peser sur Terre et dans l'espace
- Partie 2 A : le vélo CEVIS et le freinage par induction
- Partie 2 B à D : acide lactique dans le sang
- Partie 3 : ostéodensitométrie
- Partie 4 : électrocardiogramme

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/e3a/mpi/2025/physique-chimie

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

- Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le ou la candidat(e).
- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans l'évaluation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fausse ne sont pas comptabilisés.

Suivi médical d'un spationaute

Au cours de leur formation, ainsi que lors des vols qu'ils effectuent, les spationautes subissent différents examens médicaux. Nous allons, dans ce sujet, étudier différents phénomènes physico-chimiques en relation avec certains de ces examens médicaux.
Les données utiles à la résolution du sujet (valeurs numériques, formulaire et formulaire python) sont regroupées dans l'annexe à la fin de l'énoncé.

Partie 1 - Se peser sur Terre et dans l'espace

Dans cette partie, nous allons étudier la pesanteur sur Terre et dans la station spatiale internationale, puis expliquer comment un spationaute peut se peser en impesanteur (ou apesanteur).
Dans toute cette partie, nous allons considérer que le référentiel géocentrique est galiléen et nous appellerons *O* le centre de la Terre.

A) La pesanteur sur Terre

Q1. Définir le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre. Décrire le mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

Q2. On considère maintenant le référentiel géocentrique galiléen. Le poids d'un objet *M* de masse *m* situé à la surface de la Terre est défini dans le référentiel terrestre comme la somme de la force gravitationnelle et de la force d'inertie d'entraînement.
Donner l'expression de ces deux forces en introduisant notamment Ω la vitesse de rotation propre de la Terre, R_T le rayon de la Terre, *G* la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre, *m* celle de l'objet étudié et λ la latitude du point considéré (voir figure 1).

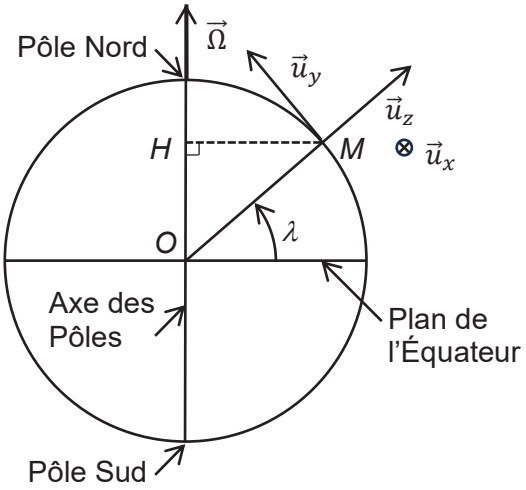


Figure 1 - Vue en coupe de la Terre

Q3. À la latitude de Paris (λ = + 49°), calculer la valeur numérique des deux forces pour une personne pesant *m* = 75 kg. Commenter.

Q4. Proposer une méthode simple utilisant la mesure de l'élongation d'un ressort de raideur *k* connue pour mesurer la masse d'un objet sur Terre. Faire un schéma explicatif et établir la formule permettant de déterminer la masse de l'objet à partir de l'élongation du ressort.

B) La pesanteur dans la Station Spatiale Internationale (ISS)

Sur le site internet de la Cité de l'Espace (www.cite-espace.com), on lit « Totalisant actuellement un peu plus de 400 tonnes orbitant à environ 400 km d'altitude à la vitesse de 28 000 km/h, l'ISS est la plus grande structure jamais assemblée dans l'espace et elle héberge des laboratoires pour y mener des expériences scientifiques impossibles à réaliser sur Terre. »

Q5. Déterminer l'expression de la vitesse d'un satellite comme l'ISS, de centre d'inertie *S* et de masse M_S tournant autour de la Terre à l'altitude *h*. On assimilera le satellite à un point matériel en orbite circulaire.

Vérifier la vitesse annoncée pour l'ISS dans cet article de la Cité de l'Espace.
On utilisera par la suite la valeur proposée de 28.10^3 km/h.
Quelle est la période de révolution de l'ISS autour de la Terre ?

On va maintenant étudier un spationaute, assimilé à un point matériel M de masse m, dans le référentiel lié à la station spatiale internationale (ISS).
Le mouvement du référentiel lié à l'ISS est en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. En effet, la grande coupole de verre, d'où les spationautes prennent des photos de la Terre, est toujours dirigée vers la Terre.

Q6. Dans le référentiel de l'ISS, le spationaute de masse m = 75 kg, toujours assimilé à son centre de gravité M, « flotte » sans bouger ni toucher les parois. Il est donc soumis uniquement à la force gravitationnelle et à la force d'inertie d'entraînement.
Donner l'expression de ces forces en faisant intervenir notamment les points O (centre de la Terre), S et M, et en fonction de G, M_T, m, R_T et de $r = OM$.
Faire l'application numérique de la somme de ces deux forces quand le spationaute est situé au centre de gravité S de la station spatiale et justifier que le spationaute est en impesanteur (ou apesanteur) dans la station spatiale.

C) Se peser dans la station spatiale

Comme les spationautes ont une activité physique beaucoup plus faible que sur Terre à cause de l'impesanteur, ils ont tendance à perdre de la masse musculaire, et même de la masse osseuse. Il est donc important de les peser régulièrement pour faire un suivi de cette perte de masse.

Q7. Expliquer pourquoi la méthode proposée à la question **Q4** ne peut pas convenir pour peser un spationaute dans l'ISS.

Q8. La solution qui a été retenue pour peser les spationautes en impesanteur est d'utiliser les oscillations d'un ressort.
Le spationaute M de masse m_2 s'accroche à un dispositif appelé BMMD (voir figure 2.a) de masse mobile m_1 = 12,43 kg. Ce dispositif inclut aussi un ressort de raideur k, et on peut le modéliser comme sur la figure 2b, où m désigne la masse du dispositif et du spationaute. On négligera les frottements.

Déterminer la relation entre la période propre et la masse m.



Figure 2.a
Spationaute sur le BMMD (Body Mass Measurement Device)

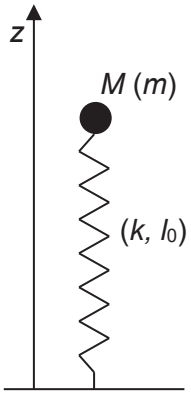


Figure 2.b
Modélisation

Q9. Si la période d'oscillation pour le dispositif à vide vaut T_1 = 0,82 s et celle avec le spationaute qui s'y accroche vaut T = 2,15 s, déterminer la formule littérale, puis la valeur numérique de la masse m_2 du spationaute qui se pèse.

Q10. En fait, les mesures de périodes ne sont pas infiniment précises. L'incertitude-type sur T_1 et sur T est la même et vaut $u(T)$ = 2,9 ms, celle sur la masse m vaut $u(m)$ = 2.9 g.
On veut maintenant calculer l'incertitude-type sur m_2 par la méthode de Monte-Carlo.
Après avoir expliqué en quelques lignes à quoi correspond cette méthode de propagation des incertitudes, compléter le script Python ci-dessous pour qu'il calcule l'incertitude-type sur m_2 notée $u(m_2)$.

```
import numpy as np

m1 = 12.43 # kg
um = 2.9e-3 # kg
T1 = 0.82 # s
T2 = 2.15 # s
uT = 2.9e-3 # s
N = 100000 # nombre de points à utiliser pour les calculs
```

Q11. L'utilisation du BMMD exige du spationaute qu'il se maintienne fortement à la barre, que ses pieds et ses genoux soient coincés et son menton collé à la planche.
Expliquer pourquoi.

Partie 2 - Test d'effort et dosage de l'acide lactique

A) CEVIS, le vélo de l'ISS

Pour éviter que les muscles ne s'atrophient trop, les spationautes sont contraints de faire 2h de sport par jour, par exemple du vélo d'appartement nommé CEVIS (Cycle Ergometer with Vibration Isolation and Stabilization System).

Un des dispositifs pouvant permettre d'apporter un couple de freinage au vélo est l'induction. Nous allons étudier un dispositif simplifié de freinage par induction.
Dans ce dispositif simplifié, les pédales entraînent une roue. Sur la face extérieure de cette roue sont placées à intervalles réguliers des spires carrées qui passent chacune leur tour devant un solénoïde alimenté par un courant continu.
Nous allons faire une modélisation unidimensionnelle de ce dispositif.

Nous allons d'abord étudier le champ magnétique créé par un solénoïde de section carrée.

On considère un solénoïde, représenté sur les figures 3 et 4, dont la longueur vaut *L* et de section carrée de côté *a* avec *L* >> *a*. Ce solénoïde est constitué en tout de *N* spires parcourues par le courant d'intensité *I* et on pose $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur. L'axe du solénoïde est confondu avec l'axe (*Az*).
On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

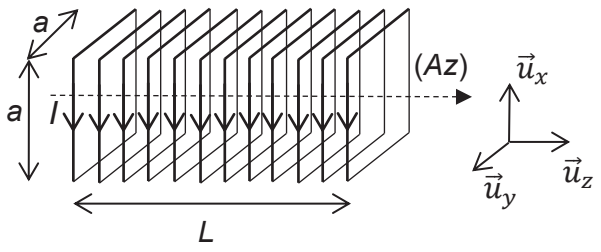


Figure 3 - Schéma du solénoïde

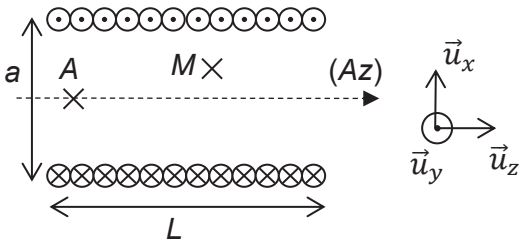


Figure 4 - Vue en coupe du solénoïde

Q12. À partir du modèle du solénoïde infini, montrer que le champ magnétique peut s'écrire $\vec{B}(M) = B(x,y)\,\vec{u}_z$, puis déterminer l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, sous la forme $\overrightarrow{B_{int}}(M) = B_0\,\vec{u}_z$, B_0 étant une constante à exprimer en fonction des caractéristiques du circuit notamment.

Si on travaille en face d'un solénoïde fini réel (longueur *L*, section carrée de côté *a*), on considère que le champ magnétique est nul sauf dans la zone grisée de surface a^2 représentée sur la figure 5, où le champ magnétique vaut $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{u}_z$.

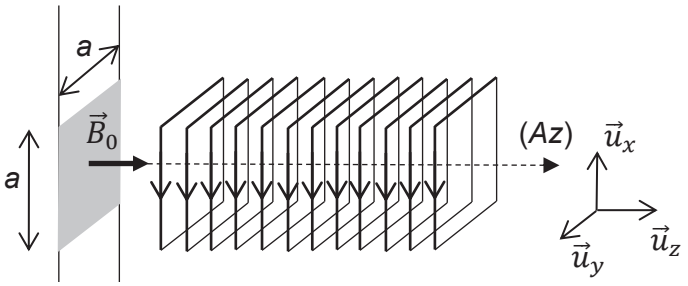


Figure 5 - Champ magnétique en face du solénoïde

Q13. On étudie maintenant une spire carrée de côté *a*, qui passe à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ imposée en face du solénoïde réel. Elle entre puis sort de la zone grisée des figures 5 et 6.
On étudie d'abord la phase où la spire entre dans le champ magnétique : la partie avant de la spire (EF) est donc dans la zone grisée et la partie arrière (CD) est dans une zone de champ nul (voir figure 6).
On considère qu'à $t = 0$, la partie avant (EF) de la spire est en $x = 0$, c'est-à-dire que la spire commence juste à entrer dans la zone grisée.
Expliquer qualitativement pourquoi il apparaît une intensité *i* dans la spire, dont le sens sera choisi comme sur la figure 6.
La spire ayant une résistance interne *R*, déterminer cette intensité *i* pendant toute la phase où la spire entre dans la zone grisée, en fonction de v_0 notamment. On négligera l'auto-inductance de la spire et son champ propre.

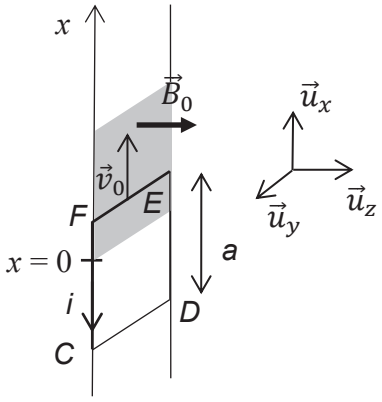


Figure 6 - Spire entrant dans la zone de champ non nul

Q14. En déduire qu'il s'exerce une force constante sur la spire pendant cette phase d'entrée dans la zone grisée, dont on donnera l'expression en fonction de B_0, a, *R* et de v_0.
Justifier qualitativement le sens de cette force.

Q15. De la même façon, montrer que la force exercée sur la spire pendant la phase de sortie de la zone grisée (c'est-à-dire quand la partie arrière de la spire (CD) est dans la zone grisée et la partie avant (EF) dans une zone de champ nul) vaut $\vec{F} = -\frac{B_0^2 a^2}{R} v_0 \vec{u}_x$.

Q16. On étudie maintenant une succession de spires toutes identiques, séparées de la distance *a*, qui passent devant le solénoïde à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ (voir figure 7).
Quel est l'avantage de choisir une distance *a* entre les spires ?

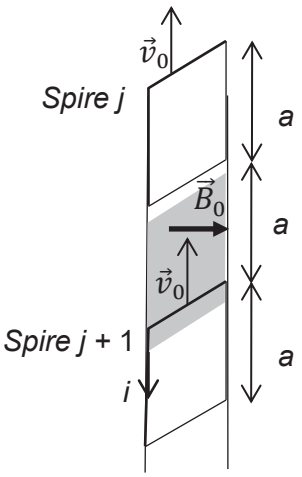


Figure 7 - Succession des spires

Q17. Déterminer la puissance dissipée par le système de freinage.
Comment varie cette puissance en fonction de la vitesse v_0 ?

Q18. Pourquoi est-il intéressant d'un point de vue sportif que la puissance augmente quand la vitesse augmente ?

B) Acide lactique dans le sang

Le sang est considéré dans cette sous-partie comme une solution aqueuse dont le pH est imposé par le couple acidobasique H_2CO_3/HCO_3^-, de $pK_{a1} = 6,4$.
Dans les conditions habituelles, le pH du sang vaut 7,4 et la concentration totale, définie par $C_t = [H_2CO_3] + [HCO_3^-]$, vaut $C_{t,0} = 0,0275$ mol.L^{-1}.
Le pH du sang doit rester en toutes circonstances entre 7,3 et 7,5, sous peine de détruire certaines cellules du sang et, à terme, de causer la mort.

Q19. Déterminer les concentrations en H_2CO_3 et en HCO_3^- dans le sang dans les conditions habituelles.

Lors d'un effort intense, il se forme de l'acide lactique $C_3H_6O_3$ (noté ici HLa) dans le muscle, qui est ensuite éliminé dans le sang. L'accumulation d'acide lactique dans le muscle est à l'origine des crampes.
La base conjuguée de l'acide lactique est l'ion lactate noté La^-. Le pKa du couple est $pK_{a2} = 3,9$.
En passant dans le sang, l'acide lactique réagit avec les ions HCO_3^-.

Q20. Faire un diagramme de prédominance dans lequel apparaissent les différentes espèces mises en jeu (H_2CO_3, HCO_3^-, HLa, La^-).
Écrire l'équation de la réaction de l'acide lactique avec l'ion HCO_3^-.
On supposera que c'est la seule réaction qui a lieu.
Exprimer et calculer la constante d'équilibre. On considèrera que la réaction est quasi-totale pour la suite des calculs. Qu'en pensez-vous *a priori* ?

Q21. Calculer le pH après un effort qui a porté la concentration initiale d'acide lactique dans le sang à $C_0' = 2,0.10^{-3}$ mol.L^{-1}.
L'hypothèse de la réaction suffisamment avancée est-elle justifiée *a posteriori* ?
Commenter la valeur du pH.

Il existe en fait un mécanisme, lié à la respiration, qui permet de ramener le pH dans la zone viable.

C) Titrage de l'acide lactique

Nous souhaitons dans cette sous-partie mesurer la concentration de l'acide lactique $C_3H_6O_3$ (noté HLa) dans le sang par un titrage pH-métrique.
Après l'effort, un volume de V_0 = 5,0 mL de sang est prélevé. L'acide lactique en est extrait par une méthode qu'on n'étudiera pas.
Cet acide est dissous dans l'eau pour obtenir une solution S de volume V = 50,0 mL.
Cette solution S est titrée par une solution S_1 de soude ($Na^+_{(aq)}$ + $HO^-_{(aq)}$) de concentration $C_1 = 1{,}00.10^{-3}$ mol.L^{-1}.

Q22. Écrire l'équation de la réaction de titrage.
Exprimer et calculer la constante d'équilibre. Que peut-on en déduire ?
Faire un schéma annoté du montage à réaliser.

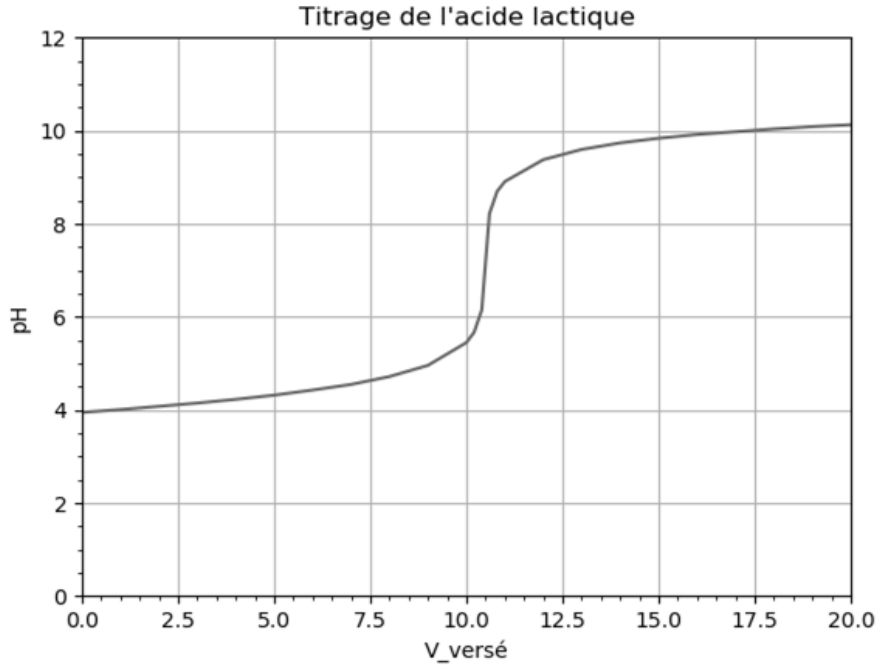


Figure 8 - Courbe de titrage de l'acide

On a tracé l'évolution du pH mesuré en fonction du volume de soude versé pour déterminer le volume à l'équivalence et la concentration d'acide lactique dans le sang.

Q23. Déterminer la concentration C d'acide lactique dans la solution S, puis la concentration C_0 d'acide lactique dans le sang prélevé.
La concentration maximale recommandée dans l'organisme est de 200 mg/L ; au-delà, on parle d'acidose lactique.
Le patient est-il en acidose lactique ?

Q24. On suit en parallèle le titrage par colorimétrie.
Parmi les indicateurs colorés ci-dessous, le(s)quel(s) peut-on utiliser pour suivre le titrage ? Justifier.

Indicateur coloré	Rouge congo	Rouge de phénol	Thymolphtaléine
Teinte acide	bleu	jaune	incolore
Teinte basique	rouge	rouge	bleu
Zone de virage	3,5 - 4,5	6,8 – 7,8	9,0 – 10,0

D) Élimination de l'acide lactique du sang

Après un effort intense, la concentration d'acide lactique $C_3H_6O_3$ (noté HLa) dans le sang, qui a beaucoup augmenté pendant l'effort, diminue progressivement pendant la phase de récupération.
Lors d'une récupération dite « active », quand le sportif poursuit un effort modéré, la diminution est plus rapide.

On considère que la concentration (notée *C*) d'acide lactique dans le sang vérifie l'équation différentielle suivante : $\frac{dC}{dt} = -\alpha.C(t) - \beta.C^2(t) + \gamma$. Les coefficients α, β et γ dépendent de l'activité physique pendant la phase de récupération et sont supposés connus et enregistrés dans le script.
On veut résoudre numériquement cette équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler explicite.

Q25. On découpe l'intervalle de temps de durée Dt, sur lequel on veut résoudre l'équation, en N intervalles de longueur *p*.
Écrire le script Python permettant de définir *p* connaissant Dt et N, puis la liste de type list (ou le tableau de type np.ndarray) L_t dont les éléments sont les dates des instants où la concentration va être calculée.

Q26. Si on note C_i la concentration d'acide lactique à l'instant de date t_i, déterminer l'expression de C_{i+1} en fonction de C_i, $p = t_{i+1} - t_i$, et des coefficients α, β et γ.

Q27. Écrire un script Python utilisant la méthode d'Euler explicite et permettant de définir la liste L_C dont les éléments sont les concentrations C_i aux différentes dates des éléments de la liste L_t. On utilisera les variables C0 (concentration initiale), alpha (α), beta (β) et gamma (γ) qu'on supposera précédemment définies.

Partie 3 - Ostéodensitométrie

En impesanteur et pour des raisons non encore élucidées, les os se déminéralisent, c'est-à-dire qu'ils perdent de la masse et deviennent plus fragiles, un peu comme les os des personnes âgées.
Pour surveiller cette perte de masse, on réalise des ostéodensitométries.
Il s'agit d'examens non invasifs qui consistent à réaliser deux radiographies pour deux longueurs d'onde de rayons X différentes.
Nous allons commencer par étudier la propagation d'une onde radio dans le vide, puis dans un os assimilé à un conducteur ohmique. Nous verrons enfin comment appliquer ces résultats à l'ostéodensitométrie.
Dans toute cette partie, le nombre complexe de partie imaginaire positive dont le carré est -1 sera noté i (i^2 = -1).

A) Propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

Q28. Écrire les équations de Maxwell dans le vide, en précisant leurs noms.

Q29. En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$. Quel nom donne-t-on à cette équation ?
En déduire la relation de dispersion pour une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit en coordonnées cartésiennes $\vec{E}(x,t) = E_0 \exp\big(i(\omega t - kx)\big)\ \vec{u}_z$.
Suivant quelle direction se propage cette onde ? Quelle est sa polarisation ?

Q30. Les rayons X utilisés dans l'ostéodensitométrie ont une énergie de 40 et 70 keV.
Déterminer l'énergie en J des rayons de 40 keV, puis leur fréquence et leur longueur d'onde.

B) Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique, épaisseur de peau

On considère un conducteur ohmique dans lequel se propage une onde électromagnétique.
Ce conducteur ohmique est localement neutre (sa charge volumique ρ est nulle), mais il est parcouru par des courants de densité volumique $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (loi d'Ohm), où σ est la conductivité électrique du matériau.

Q31. Écrire les équations de Maxwell dans le conducteur ohmique.
On va travailler en régime lentement variable (aussi appelé ARQS). Quel terme des équations de Maxwell est alors négligé dans le conducteur ohmique ?

Q32. En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique dans le conducteur ohmique. Préciser le nom de ce type d'équation.

Q33. On considère une onde électromagnétique sinusoïdale dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right)\vec{u}_z$, avec un vecteur d'onde $\underline{k}$ complexe.
Déterminer l'expression de $\underline{k}^2$ en fonction de la pulsation ω notamment.
Déterminer k_1 la partie réelle de $\underline{k}$ et k_2 sa partie imaginaire, sachant que k_1 est positive.
Introduire l'épaisseur de peau δ et donner son expression en fonction de la pulsation notamment.

Q34. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ en fonction des champs électrique et magnétique. Donner la signification physique de sa moyenne $\vec{R}_m(x) = \langle\vec{R}(x,t)\rangle$.
On ne demande pas de la calculer.

C) Application à l'ostéodensitométrie

On note P_0 la puissance entrant dans le conducteur ohmique en $x = 0$ et P_m la puissance transmise par le conducteur ohmique de longueur L.
On peut montrer que $\ln\left(\frac{P_0}{P_m}\right) = \frac{2.L}{\delta}$, où δ est l'épaisseur de peau vue à la question **Q33**.

Dans les os, l'épaisseur de peau δ dépend de la longueur d'onde λ et de la densité osseuse d.

Pour le rayonnement d'énergie $\mathcal{E}_1$ = 40 keV, $\delta_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{d}}$ et pour le rayonnement d'énergie $\mathcal{E}_2$ = 70 keV, $\delta_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{d}}$, où α_1 *et* α_2 sont des constantes connues des radiologues.
On travaille avec un os dont l'épaisseur traversée par le rayonnement, déterminée par un autre moyen, est notée L.

Q35. La puissance incidente P_0 est la même pour les deux longueurs d'onde, mais elle est inconnue. On mesure la puissance qui traverse l'os P_{Li}, avec i = 1 ou 2.
Proposer une méthode permettant de déterminer la densité osseuse d à partir des mesures de P_{L1}, P_{L2}, ainsi que de α_1, α_2 et L déterminées par d'autres moyens.

Partie 4 - Électrocardiogramme

L'électrocardiogramme permet un suivi du fonctionnement cardiaque par le simple port d'électrodes collées à la peau. Les candidats spationautes doivent faire un électrocardiogramme pour vérifier que leur cœur ne possède pas de défaut, ce qui pourrait être mortel dans des conditions aussi extrêmes que les décollages ou les atterrissages.
Mais ils subissent aussi cet examen dans la station spatiale pour étudier les réactions du cœur à l'impesanteur. Le cœur a tendance à s'atrophier, comme les autres muscles en impesanteur, ce qui rend le retour à la vie terrestre difficile pour des spationautes incapables de se tenir debout.

Nous allons d'abord étudier le fonctionnement électrique des nerfs, puis appliquer le modèle du dipôle électrostatique à l'électrocardiogramme.

A) Fonctionnement électrique d'un nerf

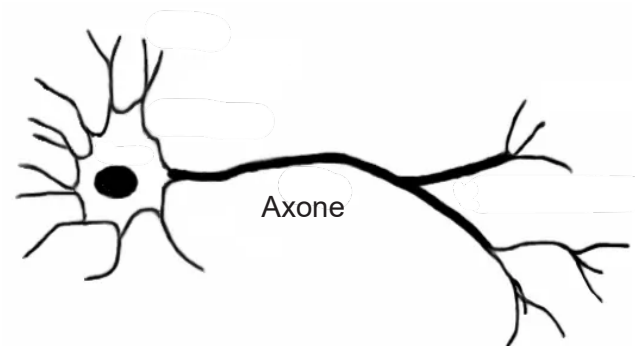


Figure 9.a - Schéma d'un neurone

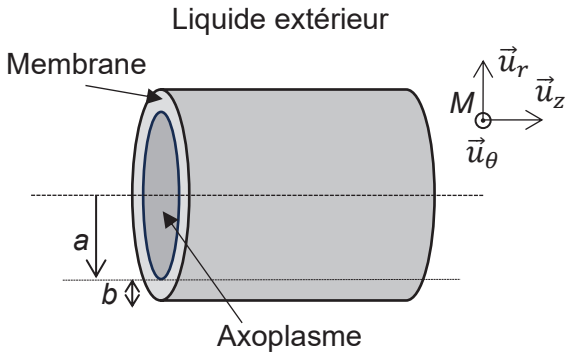


Figure 9.b - Schéma d'un axone

Un neurone est une cellule complexe dont nous allons étudier une partie, l'axone, ou fibre nerveuse, qui conduit le signal nerveux électrique dans le corps humain.

On modélise un axone par un cylindre infiniment long d'axe $(O, \vec{u}_z)$, de rayon intérieur ***a***. Il est constitué d'une membrane d'épaisseur ***b*** et de permittivité électrique relative ε_r et d'un axoplasme à l'intérieur de cette membrane (voir figure 9.b).

L'axoplasme est au potentiel V_A, tandis que le liquide extérieur est au potentiel V_E. La face intérieure de la membrane porte une charge de densité surfacique σ uniforme. On ne s'intéresse pas à la charge de la face extérieure.
On travaille en régime stationnaire.
On utilise la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z).
On admet que les calculs de champs dans la membrane sont identiques à ceux du vide, à ceci près qu'il faut remplacer la permittivité du vide ε_0 par $\varepsilon_0\,\varepsilon_r$, où ε_r est la permittivité relative de la membrane.

Q36. Montrer que le champ électrique $\vec{E}(M)$ dans la membrane ne dépend que de r et qu'il est porté par le vecteur directeur $\vec{u}_r$.
En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression de $\vec{E}(M)$ en fonction de σ, $\varepsilon_0\,\varepsilon_r$, ***a***, r et de $\vec{u}_r$.

Q37. Quelle est la relation liant le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$?
Déterminer l'expression du potentiel $V(M)$ en fonction de σ, $\varepsilon_0\,\varepsilon_r$, ***a***, r et de V_A.
En déduire que la charge surfacique σ peut s'écrire $\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V_A - V_E)}{a \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)}$.

Q38. En utilisant la relation *a* >> *b*, simplifier l'écriture de la charge surfacique σ en fonction de ε_0 ε_r, *b*, V_E et de V_A, puis montrer qu'on peut écrire la norme du champ électrique sous la forme $\left\|\vec{E}(M)\right\| = \left|\frac{V_A - V_E}{b}\right|$.
Quelle est la charge *Q* portée par la face intérieure d'une longueur *L* de membrane ?

Q39. En utilisant la relation Q = C(V_A – V_E), déterminer l'expression de la capacité de la membrane pour une longueur *L*, puis sa capacité par unité de surface de membrane c_m.
On trouve dans la littérature médicale $c_m = 1.10^{-2}$ F.m^{-2}.
Vérifier que cette valeur est compatible avec l'expression littérale trouvée plus haut.
Sachant que $V_A - V_E$ = - 60 mV, déterminer numériquement σ et le champ électrique $\vec{E}(M)$ dans la membrane.

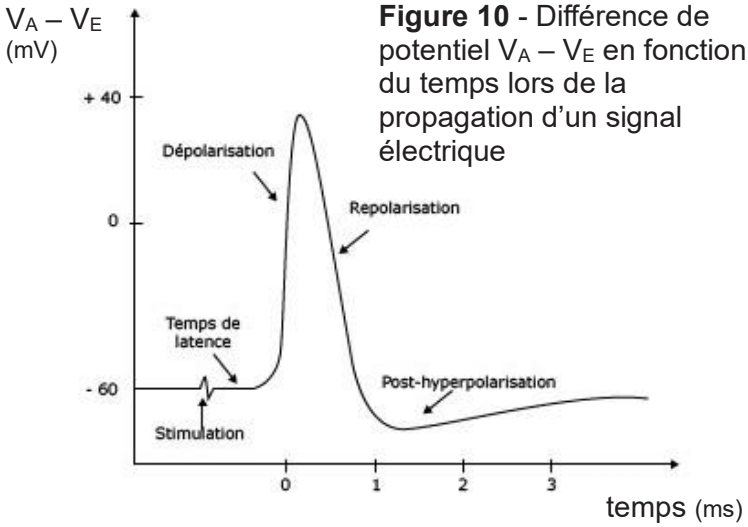


Figure 10 - Différence de potentiel $V_A - V_E$ en fonction du temps lors de la propagation d'un signal électrique

En réalité, ce potentiel et cette répartition des charges correspondent à une situation où l'axone est au repos. Quand un influx nerveux se propage, le potentiel change suivant des mécanismes biologiques que nous n'expliquerons pas (voir figure 10). On appelle le signal correspondant « potentiel d'action ».

Lorsque le cœur bat, il y a un potentiel d'action qui se propage dans le cœur. Par conséquent, on peut considérer qu'une partie du cœur est chargée positivement et une autre partie négativement. Cela ressemble à un dipôle électrostatique. Cette modélisation très simple permet en fait d'expliquer de façon satisfaisante les électrocardiogrammes.

B) Réalisation et exploitation d'un électrocardiogramme

Dans notre modèle simplifié, le muscle cardiaque se comporte comme un dipôle électrique qui varie suffisamment lentement pour qu'on puisse utiliser les formules de la statique.
On rappelle que le potentiel créé au point *M* de position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ par un dipôle électrostatique placé en *O* de moment dipolaire électrique $\vec{p}$ s'écrit $V(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

Un électrocardiogramme est un tracé contenant 12 lignes correspondant à la mesure de 12 tensions mesurées entre différentes électrodes situées sur le corps humain. Nous n'allons nous intéresser qu'à une de ces mesures de tension, entre deux électrodes placées l'une au poignet gauche (G) et l'autre au poignet droit (D). On mesure alors la tension $U_1 = V_G - V_D$ en fonction du temps.
Le cœur *O* où est situé le dipôle étudié est à égale distance *d* des électrodes *d* = OG = OD (voir figure 11).

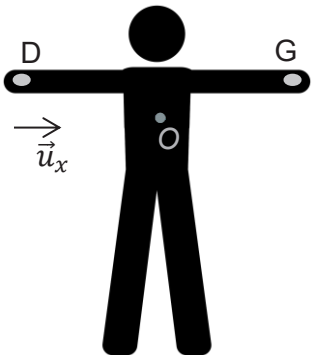


Figure 11 - Position des électrodes

Q40. En utilisant la formule $V(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ donnée plus haut, montrer que U_1 est proportionnelle à la projection du dipôle

électrostatique du cœur sur la direction $\vec{u}_x$ entre D et G. On notera *K* la constante de proportionnalité, qu'on exprimera en fonction de ε_0, *d* et de *DG*, la distance entre *G* et *D*.

Q41. Le graphe ci-dessous représente le dipôle électrique du cœur à différents instants t_i successifs pendant un cycle cardiaque (un point représente un dipôle nul).
On précise l'orientation du vecteur $\vec{u}_x$ en bas à droite.

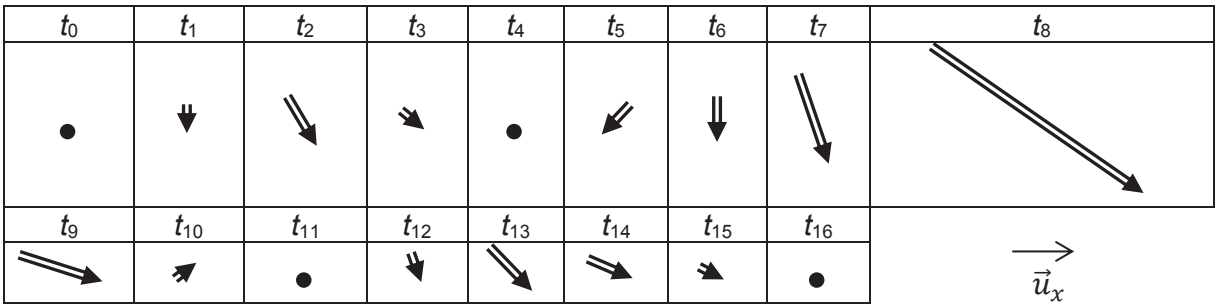


Figure 12 - Évolution du dipôle électrique cardiaque en fonction du temps (avec $t_i < t_{i+1}$)

Auquel de ces 4 graphes (représentant la tension en fonction du temps) l'enregistrement peut-il correspondre ?

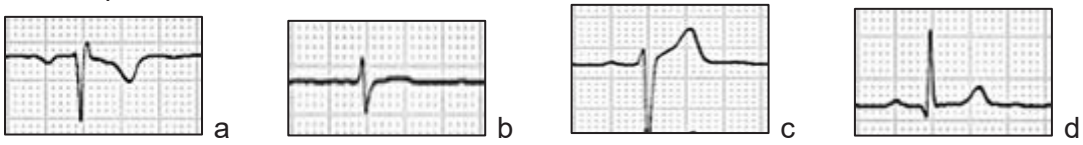


Figure 13 - 4 des 12 enregistrements d'un ECG

Les différents enregistrements de l'électrocardiogramme permettent de mettre en évidence la présence ou l'absence de certains défauts cardiaques et ainsi de faire un suivi à distance des spationautes.

Annexe

Constantes fondamentales

Constante de gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}
Constante de Planck : $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00.10^{8}$ m.s^{-1}
Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314$ J.K^{-1}.mol^{-1}
Charge de l'électron : $e = 1{,}60.10^{-19}$ C

Grandeurs physiques utiles

Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4.10^{6}$ m
Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg
Vitesse de rotation propre de la Terre : $\Omega = 7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}
Rayon intérieur d'un axone : $a = 5{,}0$ µm
Épaisseur de la membrane de l'axone : $b = 7{,}0$ nm
Permittivité relative de la membrane : $\varepsilon_r = 8{,}0$

Masses molaires

Atome	H	C	N	O	Na
Masse molaire (g.mol^{-1})	1	12	14	16	23

Couples acidobasiques et pK_a à 25 °C

H_2CO_3/HCO_3^- $pK_{a1} = 6{,}4$
HLa/La^- $pK_{a2} = 3{,}9$

Produit ionique de l'eau à 25 °C

$pK_e = 14$

Analyse vectorielle

Formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$

Gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad}\ (f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$

Annexe python

Statistiques

import numpy as np	Importation de la bibliothèque numpy
np.random.normal (val, ec)	Renvoie un flottant obtenu par tirage au sort suivant une loi normale de moyenne/espérance val et d'écart-type ec
np.random.normal (val, ec, N)	Renvoie un tableau de type numpy.ndarray constitué des tirages au sort de N flottants suivant une loi normale de moyenne/espérance val et d'écart-type ec
np.mean(L)	Renvoie la valeur moyenne de L (de type list ou numpy.ndarray)
np.std(L, ddof = 1)	Renvoie l'écart-type de L (de type list ou numpy.ndarray)

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1078 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Mesures et incertitudes
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Réactions acide-base
- Système physico-chimique et état final d'une transformation chimique

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/e3a/mpi