Concours ECRICOME Prépa, France

Session 1992, filière ECG

Mathématiques approfondies

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Problème, première partie
- Problème, deuxième partie

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ecricome/ecg/1992/maths-appro

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
EDHEC, ESC Bordeaux, ESC Marseille, ESC Reims, ESC Rouen, ICN

CONCOURS D'ADMISSION 1992

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
OPTION GENERALE

Aucun document n'est autorisé.
L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE 1

Notations :

- a est un nombre réel fixé ;
- $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- on note ϕ l'application qui, à tout élément $f \in \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$, fait correspondre la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} & g(x) = \dfrac{1}{x - a} \displaystyle\int_x^{2x - a} f(t)\, dt \\ g(a) = f(a) \end{cases}$$

1°) a) Vérifier que ϕ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$.

b) Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \neq a$.

c) On prend $f : t \to |t - a|$; l'application g correspondante est-elle dérivable en a ?

d) ϕ est-il un endomorphisme surjectif ?

2°) a) Soit $u \in \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = 2\,u(2x - a)$

(i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u\left(\dfrac{(2^n - 1)\,a + x}{2^n}\right) = 2^n\,u(x)$

(ii) En déduire que u est l'application nulle.

b) Déterminer le noyau de ϕ.

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout k entier compris entre 0 et n, on définit d_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad d_k(x) = (x - a)^k \qquad \{d_0(x) = 1\}$$

a) Déterminer $\phi(d_k)$.

b) On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que ϕ_n est un automorphisme diagonalisable.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$;

a) c_n désigne l'application $x \to x^n$. Ecrire c_n comme combinaison linéaire de $d_0, d_1, \ldots d_n$.

b) Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_x^{2x-a} f(t)\,dt = (x-a)\,x^n$$

EXERCICE 2

a désigne un réel strictement compris entre 0 et 1.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A, B et C.

S'il est en A, la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est 1 - a.

S'il est en B, la probabilité qu'il aille en A est a, et celle qu'il aille en C est 1 - a.

Enfin, s'il est en C, la probabilité qu'il aille en A est a et celle qu'il aille en B est 1 - a.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) après le n-ième déplacement".

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) avant le premier déplacement".

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix}$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$

On pose $N = {}^tM$

2°) a) Vérifier que le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N.
A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer les autres valeurs propres de N, et, suivant les valeurs de a, les sous-espaces propres associés.

c) N est-elle diagonalisable ?

3°) Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
(on fera apparaître les calculs).

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \frac{1}{4}$

4°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N^n = PD^nP^{-1}$, où D est une matrice diagonale à préciser.

b) Calculer alors N^n pour tout entier naturel n.

c) En déduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5°) On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

b) Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers l'infini.

PROBLEME

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à deux, et β un réel strictement positif.
Dans un rayon de magasin, il y a n articles $a_1, a_2, \ldots, a_n$, valant respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ francs.

Un client se présente et achète un nombre aléatoire A d'articles distincts de ce rayon ($0 \leq A \leq n$).
On suppose que, lorsqu'un client s'est décidé pour l'achat de A articles, les différents choix possibles de ces A articles sont équiprobables.

- On note S la somme payée par le client pour l'achat de ces A articles et, pour $1 \leq i \leq n$, X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le client achète l'article a_i , et 0 si non.
- L'objet du problème est principalement d'évaluer l'espérance et la variance de S, suivant deux hypothèses différentes sur A.
- Les deux parties du problème sont largement indépendantes ; seuls les résultats des questions 1°) et 6°) a) de la première partie sont utilisés dans la deuxième partie.

Première partie

1°) a) Pour $0 \leq k \leq n$, calculer la probabilité conditionnelle $P\left((X_i = 1) / (A = k)\right)$.
b) i et j désignant deux entiers distincts compris entre 1 et n,
calculer $P\Big(\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big) / (A = k)\Big)$.
c) Comment s'exprime S en fonction des X_i et des α_i ?

- On fait, dans cette première partie, l'hypothèse suivante :

(H') **A suit la loi uniforme sur {0, 1, …, n}**

2°) Calculer $P(X_i = 1)$ à l'aide de la formule des probabilités totales .

3°) Calculer l'espérance E(S) en fonction des α_i .

4°) i et j désignent deux entiers distincts compris entre 1 et n ;
a) Calculer $P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big)$.
b) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_i , X_j) .
X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

5°) a) Exprimer la variance V(S) en fonction de $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2$ et $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^2\right)$.

b) On suppose, dans cette question b), que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\alpha_i = i$.

Vérifier que : $V(S) = \dfrac{n(n+1)}{144}(3n^2 + 11n + 4)$.

6°) On suppose maintenant, plus généralement, que :
$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \alpha_i = i^{\beta}$.

a) Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i}{n}\right)^{\beta}$

En déduire un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $\sum_{i=1}^{n} i^{\beta}$, puis de E(S).

b) Donner un équivalent, de la forme $\gamma\, n^{\delta}$, de la variance V(S), quand $n \to +\infty$;
(γ et δ sont des constantes réelles que l'on déterminera).

Deuxième partie

• a désigne un nombre réel appartenant à $]0,1[$.
On fait, pour cette 2ème partie, l'hypothèse suivante :

(H") **La loi de A est définie ainsi :**

$$\begin{cases} P(A=0) = a \\ \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad P(A=k) = \dfrac{\lambda}{k} \end{cases}$$

1°) Déterminer λ .

2°) Etude du cas particulier : $n = 3$, $a = \dfrac{1}{12}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$.

Déterminer les lois de A et de S, et calculer E(S) et V(S).

<u>• On reprend maintenant l'étude du cas général.</u>

3°) Calculer $P(X_i = 1)$.

4°) i et j désignent encore deux entiers distincts compris entre 1 et n ;

a) Calculer $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.

b) Quelle relation doit-il exister entre a et n pour que les variables aléatoires X_i et X_j soient indépendantes ?

c) Calculer la covariance du couple (X_i , X_j) .

5°) Exprimer E(S) et V(S) en fonction de λ , $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^2\right)$.

6°) On suppose, dans cette question, que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\alpha_i = i^{\beta}$.

a) Ecrire un algorithme qui, à partir de n, a, β, calcule E(S) et V(S).

Donner les résultats numériques pour :

(i) $n = 10$; $a = 0,1$; $\beta = 1,5$

(ii) $n = 20$; $a = 0,5$; $\beta = 1,2$.

b) On pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$

(i) Déterminer un équivalent de v_n quand $n \to +\infty$; quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

(ii) Déduire du (i) que la suite (u_n) est convergente ;

montrer alors que : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$ quand $n \to +\infty$.

c) Donner un équivalent de E(S) quand $n \to +\infty$.

d) Donner un équivalent de V(S) quand $n \to +\infty$.

7°) Comparaison des hypothèses **(H')** et **(H")**.

a) Quelle est l'hypothèse la plus vraisemblable ?

b) Quelle est l'hypothèse la plus avantageuse en moyenne pour le vendeur ?
(on discutera suivant les valeurs de n et a).

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Couples de variables aléatoires discrètes finies
- Variables aléatoires finies et lois usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ecricome/ecg