Concours ECRICOME Prépa, France

# Session 1997, filière ECG

## Mathématiques approfondies

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Problème 3.1 : étude de deux guichets
- Problème 3.2 : étude de n guichets
- Problème 3.3 : étude d'un guichet

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ecricome/ecg/1997/maths-appro

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

**CONCOURS D'ADMISSION 1997**

# MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option scientifique

**Aucun document n'est autorisé**
L'énoncé comporte 7 pages.

**Les canditats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.**

# EXERCICE 1

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à deux. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. On note $id_{\mathcal{E}}$ l'application identique de $\mathcal{E}$ dans lui-même.
Lorsque $x$ et $y$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$, le produit scalaire de $x$ par $y$ s'écrit $\langle x, y\rangle$, et $\|x\|$ représente la norme de $x$.
Quand $u$ est un vecteur *non nul* de $\mathcal{E}$, on définit l'application $\varphi_u$ de $\mathcal{E}$ dans lui-même par :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u - x$$

1. Montrer que $\varphi_u$ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = id_{\mathcal{E}}$).

2. Démontrer que $u$ est un vecteur propre de $\varphi_u$, associé à une valeur propre que l'on précisera.

3. Établir que $\varphi_u$ conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2 \qquad \langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$$

   En déduire que $\varphi_u$ conserve la norme, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$$

4. On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base $u$, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ orthogonaux à $u$ (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).

   a. Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $-1$ pour $\varphi_u$.

   b. $\varphi_u$ est-il diagonalisable ?

   c. $t$ étant un réel non nul, comparer les applications $\varphi_u$ et $\varphi_{tu}$.

5. *Étude d'une réciproque*

On suppose que $\psi$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe une droite vectorielle $\Delta$ de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$\forall y \in \Delta \qquad \psi(y) = y \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \Delta^{\perp} \qquad \psi(z) = -z$$

a. Montrer que $\psi$ est involutif et conserve le produit scalaire.

b. Établir qu'il existe au moins un vecteur $u$ non nul de $\Delta$ tel que l'on ait :

$$\psi = \varphi_u$$

c. Soit $\mathcal{M}$ la matrice de $\psi$ dans une base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathcal{E}$. Soit $a_{ij}$ (où $i$ et $j$ désignent des entiers compris entre 1 et $n$) le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$. Montrer que :

$$a_{ij} = \langle \psi(e_i), \psi(e_j) \rangle$$

En déduire que :

$${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$$

où $I_n$ désigne la matrice unité d'ordre $n$.

## EXERCICE 2

1. On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \qquad f(x) = x^x$$

et la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

   a. Montrer que l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx$$

   converge (ici, on ne demande pas de la calculer).

   b. Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

2. Soit trois entiers naturels $n$, $p$ et $k$ ; on pose :

$$J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n \, dx \qquad \text{et} \qquad K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k \, dx$$

   a. Montrer que $J_n$ et $K_{p,k}$ existent (on distinguera les cas $p = 0$ et $p \neq 0$).

   b. Pour $k$ différent de zéro, déterminer une relation entre $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$.

   c. En déduire la valeur de $J_n$ en fonction de $n$.

3. *Calcul de I*

   a. Donner, sur $]0, 1]$, un majorant de la fonction qui à $x$ associe $|x \ln x|$.

   b. Démontrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à deux :

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J_k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{e^{n+1}}$$

   (On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle)

   c. En déduire que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

   d. Calculer avec une précision d'au moins $2 \times 10^{-7}$ une valeur approchée de $I$.

# 3. PROBLÈME

Le but de ce problème (dont *les trois parties sont indépendantes*) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps.
On rappelle que, si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilités respectives $f$ et $g$, $X+Y$ admet pour densité de probabilité la fonction $h$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,dx$$

À moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, $X$ étant une variable aléatoire à densité, on désignera par $F_X$ sa fonction de répartition, et par $f_X$ une fonction densité de probabilité de $X$.

### 3.1. Étude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes $A_1$, $A_2$ et $A_3$ entrent en même temps dans la salle. À l'instant $t = 0$, $A_1$ et $A_2$ s'adressent simultanément aux deux guichets. $A_3$ attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par $A_1$, soit par $A_2$.
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de $A_i$ ($i = 1$, 2 ou 3) est une variable aléatoire $X_i$ qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ ;
- les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont mutuellement indépendantes ;
- la durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

#### 3.1.1. Étude d'un événement

On se propose de calculer la probabilité de l'événement $E$ :"$A_3$ quitte la mairie en dernier".

1. Montrer que la variable $X_2'$ définie par $X_2' = -X_2$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1,0]$.

2. On admet l'indépendance de $X_1$ et $X_2'$.
   Calculer une densité de probabilité $\varphi_1$ de la variable $Y_1$ définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$.
   On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
   En déduire $\Phi_1$, fonction de répartition de $Y_1$.

3. Calculer la fonction de répartition, $\Phi_2$, de la variable $Z_1$ définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité, $\varphi_2$, de $Z_1$.

4. On admet l'indépendance de $Z_1$ et $-X_3$.

   a. Calculer une densité de probabilité, $\varphi_3$, de la variable $Z_1 - X_3$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

   b. En déduire la probabilité de l'événement $\{Z_1 - X_3 \leqslant 0\}$.
   Quelle est la probabilité de $E$ ?

### 3.1.2. Étude d'une variable aléatoire

On pose :

$$T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$$

1. Que représente $T_3$ pour $A_3$ ?

2. Calculer la fonction de répartition, $F$, de $\inf(X_1, X_2)$.
   En déduire une densité de probabilité, $f$, de cette variable aléatoire. Que remarque-t-on ?

3. Montrer que la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 2t - t^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (t-2)^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leqslant t \end{cases}$$

   est une densité de probabilité de $T_3$.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de $T_3$.

### 3.2. Étude de $n$ guichets

Dans cette partie, $n$ guichets sont ouverts au public.
$n$ personnes $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les $n$ guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$).
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de $A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une variable aléatoire $X_i$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ strictement positif donné ;
- les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont mutuellement indépendantes.

1. On désigne par $U_n$ la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la première*, terminé sa démarche administrative.
   Déterminer la loi de $U_n$. Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance mathématique et sa variance.

2. On note $V_n$ la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la dernière*, terminé sa démarche administrative.
   Déterminer la fonction de répartition de $V_n$. En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par :

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$

3. Soit $t$ un réel strictement positif. On désigne par $W_t$ la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant $t$.
   Donner la loi de $W_t$ ainsi que son espérance mathématique.

### 3.3. Étude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public.
Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on se donne une suite $N$, $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$, ... de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables $X_i$ $(i \in \mathbb{N}^*)$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ strictement positif donné, et que $N$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ (où $p$ désigne un élément de l'intervalle $]0, 1[$ ).
$N$ personnes $A_1$, $A_2$, ..., $A_N$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel $i$ non nul, la durée de passage au guichet de $A_i$ est donnée par la variable aléatoire $X_i$. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Par exemple :

- Si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$
- Si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$

Ainsi, $S$, qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables $X_i$, apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

1. Soit $n$ un entier naturel non nul fixé. Rappeler la formule donnant une densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. Soit $x$ un réel strictement positif. Exprimer, à l'aide d'une intégrale dont le calcul explicite (bien que possible) n'est pas demandé, la probabilité que l'événement $\{S \leqslant x\}$ soit réalisé sachant que l'événement $\{N = n\}$ l'est.

   a. En déduire la fonction de répartition de $S$ (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles $\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_0^x$ que l'on rencontrera au cours du calcul). Donner une densité de probabilité de $S$.
   Reconnaître la loi de $S$.

   b. Montrer que :
   $$E(S) = E(X_i)E(N)$$

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Réels, sommes et produits
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ecricome/ecg