Concours ECRICOME Prépa, France

# Session 2001, filière ECG

## Mathématiques approfondies

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Problème

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ecricome/ecg/2001/maths-appro

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy



**CONCOURS D'ADMISSION 2001**

Option scientifique

# MATHÉMATIQUES

Mardi 24 avril 2001 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**
**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

## Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

1) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire - X.

2) Montrer que Y - X admet une densité, notée h, définie par :

$$h(t) = \frac{ab}{a+b}\exp(-bt) \quad \text{pour } t > 0 \quad \text{et } h(t) = \frac{ab}{a+b}\exp(at) \quad \text{pour } t \leq 0.$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3) Soit s un réel positif. Etablir l'égalité $P(Z \leq s) = 1 - \frac{b\exp(-as) + a\exp(-bs)}{a+b}$.

4) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

## Exercice 2

Soient n un entier $\geq 2$ et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
I est la matrice identité de E. On note ${}^tA$ la transposée d'un élément A de E. Si $A = (a_{ij})$ appartient à E, on appelle trace de A et on note tr( A ), la somme $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ des éléments diagonaux de A.
On considère l'application g de E x E dans IR, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel $g(A, B) = tr({}^tAB)$.

1) Montrer que l'application tr qui à tout élément de E associe sa trace, est une forme linéaire sur E.

2) a) Soit M une matrice de E. Montrer que $tr(M) = tr({}^tM)$.

b) En déduire que, pour tout couple ( A, B ) de matrices de E, on a $g(A, B) = g(B, A)$.

3) Soit A un élément de E. Montrer que g( A, A ) est la somme des carrés des coefficients de A.

4) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $IR^n$ et f l'endomorphisme de $IR^n$ défini par :

$f(e_1) = e_n$ et, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, $f(e_k) = e_{k-1}$ .

5) a) Montrer que f est un automorphisme de $IR^n$.

b) Soit U la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} = {}^tU$.

*On suppose, pour les deux questions suivantes, que n = 4.*

6) Calculer $U^2$ et $U^3$ et montrer que ( I, U, $U^2$, $U^3$ ) est une famille orthogonale pour le produit scalaire g.

7) On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille ( I, U, $U^2$, $U^3$ ) et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale W de V sur F.

**Problème**

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul, a un entier *pair* supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Pour simplifier les écritures, on pose $a_n = 2^{n-1}a$.

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p. Un joueur dispose initialement d'une fortune a. On note $F_n$ la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du du $n^{ème}$ lancer. On convient que $F_0$ est la variable aléatoire certaine égale à a. On obtient la fortune $F_{n+1}$ à partir de $F_n$ de la manière suivante :

avant le lancer n+1 , le joueur mise une partie $X_n$, entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$, sur face. Si le lancer n+1 fait apparaître pile, la fortune $F_{n+1}$ est égale à $2X_n$, s'il fait apparaître face, la fortune $F_{n+1}$ est égale à $2(F_n - X_n)$. Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On étudie, dans ce problème, deux exemples ( parties 1 et 2 ) dans lesquels les mises $X_n$ sont des *variables aléatoires*. A cet effet, on associe aux variables aléatoires $F_n$ des polynômes $G_n$ dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

E( X ) et V( X ) désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de X.

**Résultats préliminaires .**

1) Pour tout entier positif ou nul n, montrer que $F_n$ prend ses valeurs dans $\{ 0 , 2 , 4 , ..., 2a_n \}$.

Pour tout entier positif ou nul n, on définit le polynôme $G_n$ par : $G_n( x ) = \sum_{k=0}^{a_n} P( F_n = 2k )x^k$

2) a) Calculer $G_n( 1 )$.

b) Que représente concrètement $G_n( 0 )$ ? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général $G_n( 0 )$ est croissante et convergente.

c) Montrer que $G'_n( 1 ) = E( F_n ) / 2$. Etablir de même que $V( F_n ) = 4G''_n( 1 ) + 2E( F_n ) - E( F_n )^2$.

3) Montrer que le polynôme $G_n$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

**Première partie**

Soit n un entier positif ou nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq a_n$. On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de $X_n$ sachant $\{ F_n = 2k \}$ est une loi uniforme sur { 0, 1, 2, ...,2k - 1, 2k }.

1) Etablir, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2k$, l'égalité $P( F_{n+1} = 2j \cap F_n = 2k ) = \frac{1}{2k+1} P( F_n = 2k )$.

(On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer n + 1.)

2) En déduire, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq a_{n+1}$, une expression sommatoire de $P( F_{n+1} = 2j )$.

3) Montrer que pour x appartenant à $[ 0 ,1 [$, $G_{n+1}( x ) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)\cdot(x-1)} P( F_n = 2k )$.

**Tournez la page S.V.P.**

4) En déduire, pour x appartenant à IR, l'égalité : $(1 - x)G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2)\,dt$ (1)

5) Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout $n \geq 0$, on a $E(F_n) = a$.

**Deuxième partie** *(Les deux sous parties A et B sont indépendantes)*

On suppose maintenant que la *loi conditionnelle* de la variable $X_n$ sachant $\{F_n = 2k\}$ est une loi binômiale de paramètres 2k et r, r étant un réel de ] 0 , 1 [.

**A) Simulation informatique de l'expérience**

On considère le programme suivant :

```
program simulation ;
var a , n , i , X , F : integer ;
        r , p : real ;
function mise( m : integer , s : real ) : integer ;
        .....
        end ;
begin
randomize ; readln ( n ) ; readln( p ) ; readln( r ) ; readln( a ) ; F := a ;
for i := 1 to n do
        begin X := mise( F , r ) ;
                if random < p then .....
                .....
        end ;
end.
```

La fonction " random " est une fonction sans argument. A son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, nombre qui suit une loi uniforme sur [0 , 1]. L'instruction " randomize " est utilisée pour obliger l'ordinateur à générer un nouveau nombre à chaque appel de la fonction.

La fonction " mise " est une fonction qui simule une loi binômiale de paramètres m et s. Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et m, la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binômiale de paramètres m et s.

1) Rédiger les lignes manquantes ( déclarations et instructions ) dans la définition de la fonction " mise ".

2) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives $F_1, ..., F_n$ du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.

**B) Etude théorique**

Dans toute cette partie, on posera $A = pr^2 + ( 1 - p )( 1 - r )^2$ et $B = 2[pr + ( 1 - p )( 1 - r )]$.

1) En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geq 0$, on a : $G_{n+1}( x ) = p\, G_n[ ( xr+1-r )^2 ] + ( 1- p )\, G_n[ ( x-xr + r )^2 ]$. ( 2 )

*Dans les questions 2 et 3, on suppose que p = 1/2.*

On considère le trinôme Q, défini par $Q( x ) = Ax^2 + 2r( 1-r )x + A$, et la suite $(u_n)$ définie par la condition initiale $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = Q( u_n )$.

2) a) Montrer, pour tout réel x, l'égalité : $Q( x ) = x + A( x - 1 )^2$.

b) Montrer que l'intervalle [0 , 1] est stable par Q.

c) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.

3) a) Montrer, en utilisant ( 2 ) et la convexité de $G_n$, que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \geq 0$, on a l'inégalité : $G_{n+1}( x ) \geq G_n[ Q( x ) ]$.

b) Etablir, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité : $G_{n+1}( 0 ) \geq G_1( u_n )$. Conclure.

*On revient au cas général p quelconque.*

4) a) Montrer à l'aide de ( 2 ), que la suite $(E( F_n ))_n$ est géométrique de raison B.

b) En posant p' = 1/2 - p et r' = 1/2 - r, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r.

c) Montrer que si la suite $(E( F_n ))_n$ tend vers 0, alors la suite $(P( F_n = 0 ))_n$ tend vers 1.

5) a) Pour tout entier $n \geq 0$, établir à l'aide de ( 2 ) une relation entre $G''_{n+1}( 1 )$, $G''_n( 1 )$ et $G'_n( 1 )$.

b) Montrer que la suite de terme général $v_n = G''_n( 1 ) / B^n$ est arithmético-géométrique.

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 0$, une expression explicite de $G''_n( 1 )$ en fonction de a, n, A, B.

*On suppose, dans cette dernière question, que p = r = 1/3.*

6) a) Calculer les trois réel A, B, $B^2$ et en déduire un équivalent de $V( F_n )$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que la probabilité $P( F_n < 2^{n/4} a )$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités : $2^{1/4} > 10/9$ et $3\cdot\sqrt{2} > 4$ .)

**Fin de l'épreuve**

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Algèbre bilinéaire
- Compléments d'algèbre linéaire
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Polynômes
- Suites réelles

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ecricome/ecg