Concours ECRICOME Prépa, France

Session 2007, filière ECT

Mathématiques (voie technologique)

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie ressaisie du sujet officiel, sans en-tête du concours ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ecricome/ect/2007/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECRICOME 2007 voie T

1. EXERCICE.

On considère la fonction f déterminée sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'unité choisie étant le cm.

1.1. Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$$

1. Soit P la fonction polynôme déterminée $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

    1. Prouver que P est factorisable par $x - 1$.
    2. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $x - 1$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.
    3. Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$

3. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.

4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) > 0$$

1.2. Etude de la fonction f.

1. Déterminer la limite de f (x) lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f, notée $\mathcal{C}_f$?

    1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque que x tend vers $+\infty$.
    2. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
    3. Montrer que sur $[1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ).

2. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	$0,5$	3
$f(x)$	$-3,3$	$4,3$

    1. Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

    2. En déduire les variations de f.
    3. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ et tracer la droite (Δ).
    4. Hachurer la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, (Δ) et les deux droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
    5. Ecrire, à l'aide d'une intégrale, la valeur de l'aire de la partie hachurée du plan.
    6. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de cette intégrale.

2. EXERCICE.

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour tout entier naturel } n : & u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ \text{avec } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1 & \end{array}$$

A cet effet on définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BC et CB.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :
$$B^n = B \ , \qquad C^n = (-1)^{n-1}C$$
3. Vérifier que l'on a :
$$A^2 = 5A - 6I$$
où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.
4. Etablir que la matrice A est-inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.
5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$A^n = 3^n B - 2^n C$$
La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$. C'est-à-dire a-t-on :
$$A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C \ ?$$
6. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$$

2.2. Expression de u_n en fonction de n.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.

3. EXERCICE.

Soucieux de mieux connaître sa clientèle, un gérant de magasin a réalisé une étude :

3.1. Etude du temps moyen d'attente en caisse.

Après enquête, on estime que le temps d'attente en caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On suppose que les temps d'attente successifs d'une même personne lors des différents passages en caisse sont indépendants.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. On note F_T la fonction de répartition de la variable T. Démontrer que :

$$\begin{cases} F_T(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ F_T(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. Vérifier que la probabilité que le temps d'attente en caisse soit supérieur à quatre unités (de temps) est égale à $\dfrac{1}{25}$.
4. Quelle est la probabilité que le temps d'attente en caisse soit inférieur à cinq unités sachant qu'il est supérieur à quatre unités ?
5. Pendant 125 jours une même personne se présente à la caisse.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où cette personne attend plus de quatre unités à la caisse.
   1. Déterminer la loi de X.
   2. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

6. Plus impatient, un autre client décide de passer à la concurrence le jour où il attend plus de quatre unités à la caisse.
   On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de fois où ce client s'est présenté à la caisse de ce magasin avant de passer à la concurrence, si cet événement se produit.

   1. Déterminer la loi de Y.
   2. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

3.2. Mode de paiement de la clientèle.

L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} P\left[S = 0 \cap U = 0\right] &= 0.4 \\ P\left[S = 0 \cap U = 1\right] &= 0.3 \\ P\left[S = 1 \cap U = 0\right] &= 0.2 \\ P\left[S = 1 \cap U = 1\right] &= 0.1 \end{aligned}$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminer les lois de S et U .
2. Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indé-pendantes ?
3. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Compléments d'intégration
- Polynômes
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Matrices carrées : inverse et puissances
- Suites réelles
- Variables aléatoires à densité
- Variables aléatoires finies et lois usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ecricome/ect