Concours ECRICOME Prépa, France

# Session 2010, filière ECT

## Mathématiques (voie technologique)

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ecricome/ect/2010/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2010

3

# Mathématiques

Option Technologique

**Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":*
*8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

Tournez la page s.v.p

# EXERCICE 1

On considère les matrices $M$ et $P$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## I. Réduction de la matrice $M$ et calcul de $M^n$.

1. Prouver que la matrice $P$ est inversible et donner les neuf coefficients de la matrice inverse $P^{-1}$.
2. Calculer la matrice $T$ définie par : $T = P^{-1}MP$.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ :
$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ :
$$M^n = PT^nP^{-1}.$$
5. En déduire l'expression de la matrice $M^n$ sous la forme d'un tableau de nombres.

## II. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 0. \\ \text{Pour tout entier naturel } n : u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

1. Calculer $u_3$ et $u_4$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on considère la matrice colonne : $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

   Vérifier que, pour tout entier naturel $n$ :
   $$V_{n+1} = MV_n.$$
3. Etablir, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ :
   $$V_n = M^nV_0.$$
4. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

# EXERCICE 2

Dans cet exercice, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{-x}.$$

## I. Etude de la fonction $f$.

On note $C$ la courbe représentative de $f$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour $C$ ?

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour $C$ ?

2. (a) Pour tout réel $x$, calculer $f'(x)$ et construire le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $D$ la tangente à la courbe $C$ au point d'abscisse 0.

   Donner une équation de la droite $D$.

   (c) Etudier la convexité de $f$.

3. Tracer sur un même schéma $C$ et $D$ (**valeur numérique** : $e^{-1} \approx 0,4$).

## II. Etude d'une famille d'équations.

Dans cette partie on s'intéresse aux solutions positives ou nulles (si elles existent) de l'équation

$$(E_n) : f(x) = x^n$$

où $n$ désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $(E_1)$.

2. Pour $n$ entier naturel avec $n \geqslant 2$ , on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = e^{-x} - x^{n-1}.$$

   (a) Montrer que $g_n$ est une fonction strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

   (b) En déduire que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.

   On note cette solution $\alpha_n$.

   (c) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \alpha_n \in ]0, 1[$.

   (d) Donner, pour $n \geqslant 2$, l'ensemble des solutions positives de l'équation $(E_n)$.

*Tournez la page s.v.p.*

## III. Etude d'une variable aléatoire à densité.

Dans cette partie on considère la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}_-$, calculer l'intégrale : $\int_0^x f(t)dt$.

2. Montrer que la fonction $h$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$.

3. On note $H$ la fonction de répartition de $X$. Déterminer la fonction $H$.

4. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \leqslant 1), \quad P(1 \leqslant X \leqslant 2) \quad \text{et} \quad P_{(X \leqslant 2)}(X \geqslant 1).$$

# EXERCICE 3

Cet exercice étudie deux jeux de dés avec des dés équilibrés à six faces.

## I. Etude du premier jeu :

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux dés donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. Calculer la probabilité $p$ de l'événement $A$ : « Les deux dés donnent le même résultat ».

2. Le joueur répète $n$ fois le même jeu et on note alors $Y_n$ le nombre de points obtenus par le joueur après ces $n$ parties.

   (a) Reconnaitre la loi de $Y_n$ (*une justification soigneuse est attendue).*

   Donner explicitement $P(Y_n = k)$ pour les valeurs $k$ prises par $Y_n$.

   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(Y_n)$ de la variable aléatoire $Y_n$ et sa variance $V(Y_n)$.

3. Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il marque un point pour la première fois.

   On note alors $Z$ la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur.

   (a) Reconnaitre la loi de $Z$ (*une justification soigneuse est attendue*).

   Donner explicitement $P(Z = k)$ pour les valeurs $k$ prises par $Z$.

   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire $Z$ et sa variance $V(Z)$.

## II. Etude d'un deuxième jeu.

Dans ce jeu, on lance successivement deux dés équilibrés.

On note :

$D_1$ le résultat du premier dé et $D_2$ le résultat du deuxième dé,

$E_1$ l'événement : « $D_1 < D_2$ », $E_2$ l'événement : « $D_1 = D_2$ »

et $E_3$ l'événement : « $D_1 > D_2$ ».

Lors d'une partie,

- si l'événement $E_1$ se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement $E_2$ se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement $E_3$ se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète $n$ fois ce jeu. Pour tout entier naturel $i \geqslant 1$, on note :

- $X_i$ la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{\text{ème}}$ partie ;
- $S_i$ le nombre total de points marqués après $i$ parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements $E_1$, $E_2$ et $E_3$ (*On démontrera notamment que* $P(E_1) = P(E_3) = \dfrac{5}{12}$).

2. Soit $i \in \{1, 2, ...., n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i$ puis calculer son espérance et sa variance.

3. Trouver la loi de la variable aléatoire $S_1$.

4. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire $S_2$ et donner sa loi.

5. (a) Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire $S_3$.

   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple $(S_2, S_3)$ . *On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.*

   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire $S_3$.

6. (a) Ecrire $S_n$ en fonction des variables aléatoires $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$.

   En déduire l'espérance mathématique $E(S_n)$ de $S_n$.

   (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Matrices carrées : inverse et puissances
- Suites réelles
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Compléments d'intégration
- Variables aléatoires à densité
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Variables aléatoires finies et lois usuelles

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ecricome/ect