Concours ECRICOME Prépa, France

Session 2022, filière ECT

Mathématiques (voie technologique)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ecricome/ect/2022/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2022

prépa

3

Mathématiques

Option Technologique

Lundi 25 avril 2022 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » : 8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 5 pages.

Le concours ECRICOME PRÉPA est une marque déposée. Toute reproduction du sujet est interdite. Copyright ©ECRICOME - Tous droits réservés

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 1

Partie A : Calcul matriciel et suites

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}.$$

On note enfin pour tout entier naturel n, la matrice colonne : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer le produit matriciel PQ.
   (b) En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$.
   (b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.
3. (a) Vérifier que $(4M - I)(4M - 4I)$ est la matrice nulle.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice M.
4. (a) Déterminer la matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.
   (b) Donner **sans démonstration**, pour tout entier naturel n, l'expression de M^n en fonction des matrices D, P et P^{-1}.
   (c) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$.
   (d) Justifier que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{cases}$.
   (e) En déduire les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Compléter le script **Scilab** ci-dessous afin qu'il calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que l'on ait à la fois : $a_n \leqslant 0,334$ et $b_n \geqslant 0,333$.

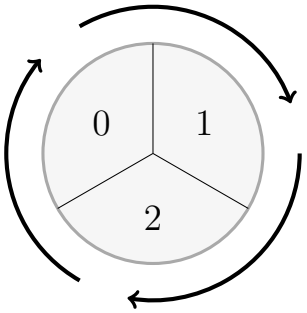
```
n=0
a=1 ; b= .........
while .........
    n = .........
    a = 1/3*(1+2/4^n)
    b = .........
end
disp(.........)
```

Partie B : Application à un jeu de hasard

On suppose qu'un joueur déplace un pion sur les trois cases d'une roue de loterie partagée en tiers numérotés 0, 1 et 2, dans le sens des aiguilles d'une montre (c'est-à-dire dans le sens de la flèche indiquée), selon le protocole suivant :

- au début du jeu, le pion est sur la case 0 ;
- à chaque coup le joueur tire de façon équiprobable un chiffre k de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ et avance son pion de k cases, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ainsi, par exemple, s'il tire le chiffre 3, il avance son pion de 3 cases ; s'il tire le chiffre 0, il reste sur place.



On note, pour tout entier naturel n, les événements :

- A_n : « à l'issue du $n^{ième}$ coup, le pion est sur la case 0 »,
- B_n : « à l'issue du $n^{ième}$ coup, le pion est sur la case 1 »,
- C_n : « à l'issue du $n^{ième}$ coup, le pion est sur la case 2 ».

On convient que A_0 est l'événement certain et que B_0 et C_0 sont des événements impossibles.

6. Donner les valeurs des probabilités $P(A_0)$, $P(B_0)$, $P(C_0)$, $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$.
7. (a) Expliquer pourquoi $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$. Donner les valeurs de $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer pour tout entier naturel n, les probabilités des événements $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ en fonction des probabilités des événements $A_n, B_{n,}C_n$.
   (c) En déduire que les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ sont données par les valeurs de a_n, b_n et c_n obtenues dans la **partie A**.
8. Interpréter alors le résultat de la question 4.(e) obtenu dans la **partie A**.

Exercice 2

On pose, pour tout réel x de l'intervalle $]-1, +\infty[$:

$$f(x) = x \ln(1 + x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, et que sa dérivée f' est également dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en -1.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Tournez la page s.v.p.

(b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{x+2}{(1+x)^2}$.

(c) En déduire les variations de la fonction f' sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

3. (a) Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x > -1$.

(b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

4. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan, en soignant le tracé au point d'abscisse 0.

5. On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I = \dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$.

(b) Vérifier que : $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

(c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$.

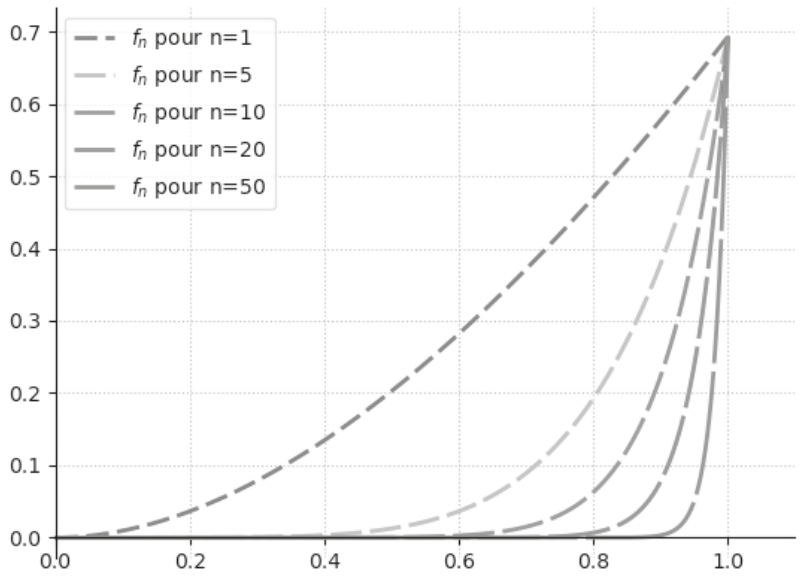
(d) Calculer l'intégrale I.

6. On considère à présent la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1,+\infty[, \quad f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

On pose alors pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x$.

Le graphique ci-dessous contient les représentations graphiques des fonctions f_1, f_5, f_{10}, f_{20} et f_{50} sur l'intervalle $[0,1]$.



Recopier et compléter le script **Scilab** ci-dessous pour qu'il trace les courbes des fonctions ci-dessus.

```
function y=f(x)
    y = ............
endfunction
for n = .........
    x=linspace(0,1,100)
    fplot2d (..... , .....)
end
```

7. (a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En utilisant le graphique ci-dessus, conjecturer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

8. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2).$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 3

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2a^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2a \\ 0 & \text{si } x > 2a \end{cases}.$$

1. Justifier que f est continue en 0. La fonction f est-elle continue en $2a$?

2. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on note X une variable aléatoire de densité f.

3. (a) Montrer que la fonction de répartition F de la variable aléatoire X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases}.$$

   (b) Calculer la probabilité conditionnelle $P_{\left[X > \frac{a}{2}\right]}(X \leqslant a)$.

4. Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{4a}{3}$.

5. Montrer que X admet une variance et déterminer $V(X)$.

Tournez la page s.v.p.

6. On note $Y = X^2$ et on note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Déterminer $G(x)$ pour tout réel x.
   On vérifiera en particulier que, pour tout réel x de $\left[0, 4a^2\right]$, on a : $G(x) = \dfrac{x}{4a^2}$.
   (b) En déduire que Y suit une loi usuelle que l'on précisera.
   (c) On rappelle que la commande **Scilab** `rand()` simule le choix aléatoire d'un réel uniformément entre 0 et 1.
   Expliquer ce que simule la commande `rand()*4*a^2`.
   (d) On admet que réciproquement si Y suit une loi uniforme sur $\left[0, 4a^2\right]$, alors $\sqrt{Y}$ suit la même loi que X.
   Déduire de la question précédente un script **Scilab** permettant de simuler la variable aléatoire X.

7. Soit $n \geqslant 1$. On suppose à présent que le réel a est inconnu et on cherche à l'estimer.

   Pour cela on considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X. On pose : $T_n = \dfrac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de a.
   (b) Calculer le risque quadratique de T_n.
   (c) Iris envoie à Marceau un vecteur-ligne `X` de longueur n qui contient une réalisation des n variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n, et lui propose le défi de trouver une estimation de la valeur de a qu'elle a choisie.
   Recopier et compléter le script **Scilab** ci-dessous pour qu'il permette à Marceau de relever le défi.

```
n = length(X) // longueur de X
T_n = ............
disp(............)
```

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Matrices carrées : inverse et puissances
- Probabilités sur un univers fini
- Suites réelles
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'intégration
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Variables aléatoires à densité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ecricome/ect