Concours ECRICOME Prépa, France

# Session 2023, filière ECT

## Mathématiques (voie technologique)

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ecricome/ect/2023/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Ecricome

**CONCOURS D'ADMISSION 2023**

prépa

3

# Mathématiques

Série Technologique

**Lundi 17 avril 2023 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 6 pages.

Le concours ECRICOME PRÉPA est une marque déposée. Toute reproduction du sujet est interdite. Copyright ©ECRICOME - Tous droits réservés

***CONSIGNES***

**Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

*Tournez la page s.v.p.*

# Exercice 1

## Partie 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\begin{cases} u_1 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{5}{12}u_n + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1. Compléter la fonction en langage Python suivante, qui prend en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `u1` de $[0,1]$ correspondant au terme initial $u_1$ de la suite, et renvoie le terme $u_n$.

```
import numpy as np

def suite(n,u1):
    u = u1
    for k in range(...):
        u = ....
    return u
```

2. (a) Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $x = \dfrac{5}{12}x + \dfrac{1}{3}$. Notons $\ell$ la solution.
   (b) On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \ell$.
   Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
   (c) Donner l'expression du terme général de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de $n$ et de $v_1$.
   (d) En déduire celle du terme général de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de $n$ et de $u_1$.

## Partie 2

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. On note $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $AX_1$ et $AX_2$.
   (b) En déduire que 12 et 5 sont des valeurs propres de $A$ et donner des vecteurs propres associés.
4. Montrer que $P$ est inversible et donner son inverse. (*On vérifiera que* $P^{-1} = Q$.)
5. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $P^{-1}X$.
   (b) En déduire l'expression de $A^nX$ pour tout entier naturel $n$.

## Partie 3

Un client d'une agence de voyages cherche à prévoir ses vacances au soleil pour l'hiver (entre décembre et février) et à éviter la pluie. Sur la destination souhaitée, on suppose que soit il pleut, soit il fait beau. On sait de plus que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

- S'il fait beau un certain jour $n$, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{3}{4}$.
- S'il pleut un certain jour $n$, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $A_n$ l'événement : « Il fait beau le jour $n$ », et $a_n$ la probabilité $P(A_n)$.
- $B_n$ l'événement : « Il pleut le jour $n$ », et $b_n$ la probabilité $P(B_n)$.

On suppose que le jour 1, à savoir le 1er décembre, il fait beau. Donc $a_1 = P(A_1) = 1$.

8. Déterminer $b_1$, $a_2$, $b_2$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $P(A_{n+1}) = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$ et que $P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n)$.
   (b) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où $M = \frac{1}{12}A$.
   (c) Justifier que $a_n + b_n = 1$.
10. (a) Montrer, par récurrence sur $n$, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    (b) En déduire l'expression de $a_n$ et de $b_n$ en fonction de $n$.
11. On se propose, dans cette question, de trouver le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ d'une manière différente.
    (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$.
    (b) En utilisant la partie 1, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$.
    (c) En déduire l'expression de $b_n$ en fonction de $n$.
12. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
13. Le client doit partir le 1er décembre, pour un séjour de 10 jours (du 1er décembre au 10 décembre).
    (a) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau durant les 9 premiers jours et qu'il pleuve le dernier jour ?
    (b) Quelle est la probabilité que le voyageur reparte sous la pluie, c'est-à-dire qu'il pleuve le jour 10 ?

Tournez la page s.v.p.

# Exercice 2

## Partie 1

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que l'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}$.
   On admet que $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$.
   En déduire la monotonie de $f$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de $f$ en $-\infty$.
   $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.
4. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
   (b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.
   (c) En déduire que la droite $(D)$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   (d) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel $x$, et en déduire la position relative de $(D)$ par rapport à $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer l'équation de la tangente $(T_0)$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
6. (a) Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant les limites aux bornes et la valeur en 0.
   (b) Tracer sur un même repère l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites $(D)$ et $(T_0)$.
   *On admet qu'une valeur approchée de* $\ln(2)$ *est* $0,69$.

## Partie 2

Pour tout entier naturel $n$, on pose pour tout réel $x$ de $[0, 1]$, $g_n(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-nx}\right)$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$.

7. (a) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente.
8. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n$,
   $$I_n = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-n}\right) + n \int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-nx}}\mathrm{d}x.$$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-n}\right) + n \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n^2}$.
   (d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
9. (a) Écrire une fonction en langage Python, nommée `gn`, prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `x` et renvoyant $g_n(x)$.

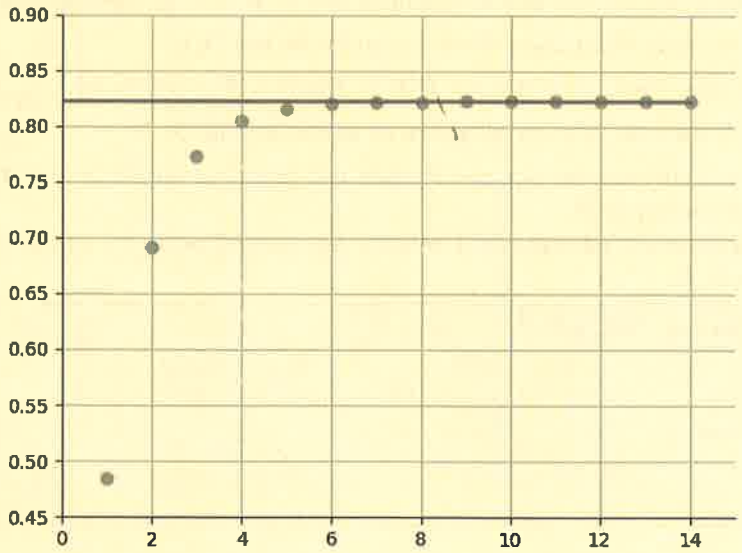
(b) On dispose d'une fonction en langage Python nommée `I` prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et renvoyant une valeur approchée de $I_n$ à $10^{-7}$ près.
On exécute le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L_x = np.zeros(14)
L_y = np.zeros(14)
for n in range(14):
    L_x[n] = n+1
    L_y[n] = (n+1)*I(n+1)

plt.plot(L_x,L_y,'.r')
plt.plot([1,14],[np.pi**2/12,np.pi**2/12])
plt.show()
```

On obtient la figure ci-dessous :




Que peut-on conjecturer sur la suite $(nI_n)_{n\geqslant 1}$ ?

# Exercice 3

Soit $s$ un réel strictement positif. On définit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s \\ \dfrac{2s^2}{x^3} & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.

On modélise, pour un employé pris au hasard dans la population, le nombre $S$ de SMIC (salaire minimum) que vaut son salaire. On note $s$ le SMIC. Par définition, on a toujours $S \geqslant s$. Si par exemple un employé gagne 2 SMIC, son salaire vaut $S = 2s$.
On suppose que $S$ est une variable aléatoire à densité, de densité $f$, où $f$ est la fonction définie ci-dessus.

2. Montrer que la fonction de répartition de $S$ est la fonction $F$ définie par :

$$\forall x \in ]-\infty, s[,\ F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [s, +\infty[,\ F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2.$$

3. Dresser le tableau de variations de $F$ sur $[s, +\infty[$ et représenter l'allure de sa courbe sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $G$ la fonction définie sur $[0, 1[$ par $\forall y \in [0, 1[,\ G(y) = s\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}$.
   (a) Montrer que $F$ est une bijection de $[s, +\infty[$ vers $[0, 1[$.
   (b) Montrer que $\forall y \in [0, 1[,\ G(y) \in [s, +\infty[$.
   (c) Montrer que $\forall y \in [0, 1[,\ F\big(G(y)\big) = y$.
5. Soit $U$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$ et $V$ la variable aléatoire égale à $G(U)$.
   (a) Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1[$.
   (b) Montrer que $\forall x \in [s, +\infty[,\ P(V \leqslant x) = P\big(U \leqslant F(x)\big) = F(x)$ et $\forall x \in ]-\infty, s[,\ P(V \leqslant x) = 0$.
   (c) En déduire que $V$ est une variable aléatoire de même loi que $S$.
6. Compléter la fonction `S` suivante en langage Python qui prend en entrée le réel strictement positif `s` et qui renvoie une simulation de $S$.
   *On rappelle que la commande* `rd.random()` *renvoie un nombre aléatoire compris entre* 0 *et* 1 *selon une loi uniforme sur* $[0, 1[$.

```
import numpy.random as rd

def S(s):
    U = rd.random()
    S = ....
    return S
```

7. Démontrer que $S$ admet une espérance et vérifier que $E(S) = 2s$.
8. $S$ admet-elle une variance ?
9. Démontrer que la probabilité qu'un employé ait un salaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$ vaut $p = \dfrac{4}{9}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes représentant le salaire de $n$ salariés distincts.
On s'intéresse ici au nombre $N_n$ de ces $n$ salariés qui ont un salaire horaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$.
On admet que $N_n$ est une variable aléatoire.

10. Déterminer la loi de $N_n$.
11. Calculer $E(N_n)$ et vérifier que $V(N_n) = \dfrac{20n}{81}$.
12. Déterminer, en fonction de $n$, la probabilité qu'au plus 2 employés parmi les $n$ aient un salaire horaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$.

13. Notons $M_n = \dfrac{1}{2n}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$.

(a) Déterminer l'espérance de $M_n$.

(b) On considère le programme suivant où S est la fonction en langage Python obtenue à la question 6.

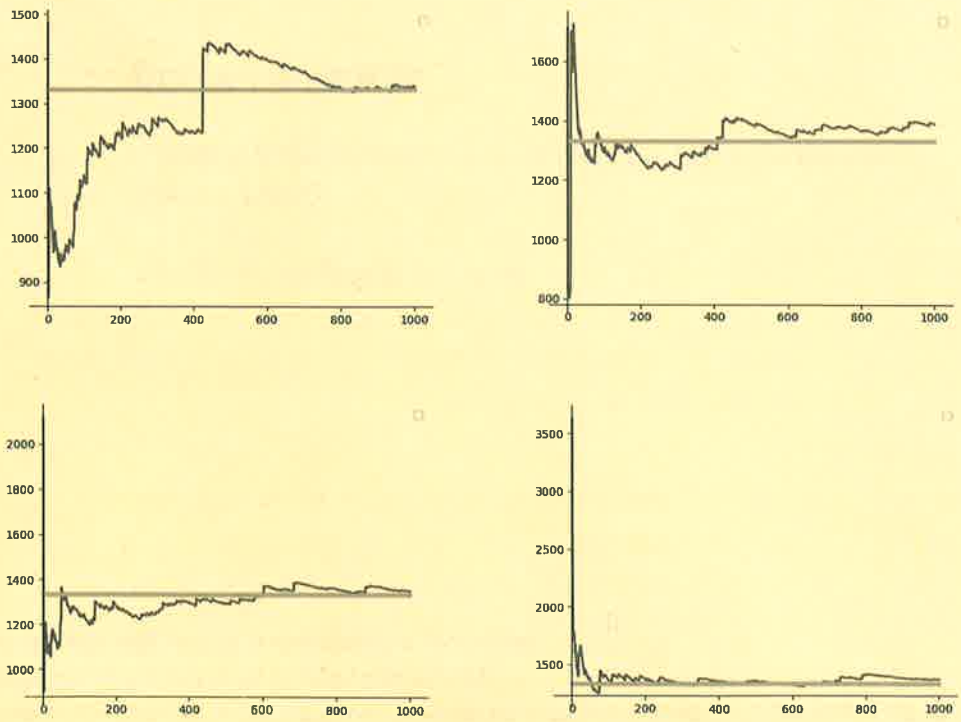
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

n = 1000
s = 1330
M = 0
F = np.zeros(n)
X = np.zeros(n)
L = np.zeros(n)
for k in range(1,n+1):
    M = M + S(s)
    F[k-1] = 1/(2*k)*M
    X[k-1] = k
    L[k-1] = s

plt.plot(X,F)
plt.plot(X,L)
plt.show()
```

Que représente $F$ ?

(c) On obtient les courbes suivantes :




Justifier que les appels différents de ce programme donnent des courbes différentes.
Que permet de conjecturer ces courbes sur le comportement des réalisations de $M_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Matrices carrées : inverse et puissances
- Suites réelles
- Probabilités sur un univers fini
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'intégration
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Variables aléatoires à densité

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ecricome/ect