Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

# Session 2011, filière ECS

## Mathématiques II (option S)

### Ce que traite le sujet

- Questions 1, 3, 9, 14, 16 à 18 : algèbre linéaire
- Questions 2, 4, 6, 15, 20 : analyse
- Questions 5, 7, 8, 10 à 13, 19 : probabilités et estimation

**Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.**

Ce document est une ressaisie du sujet : la page de garde et les consignes manquent, le titre « Mathématiques II - 2011 » a été ajouté.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2011/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# Mathématiques II - 2011

***Question 1 :*** On définit les fonctions *ch* et *sh* sur **IR**, par : $cht = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$ et $sht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

On pose pour $t \in R$, M = $\begin{bmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{bmatrix}$,alors spectre de M ,est :

A) $\{e^t, -e^t\}$ B) $\{e^{-t}, -e^t\}$ C) $\{-e^{-t}, -e^t\}$ D) $\{e^t, -e^{-t}\}$ E) Autre

***Question 2 :*** On note $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \, dx$ , la somme de la série de terme général $\frac{I_n}{n!}$ est :

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) Autre

***Question 3:*** Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $B = (e1, e2, e3, e4)$ une base orthonormale de $E$ .On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme E associé à la matrice A relativement à la base B :

A) f est un endomorphisme non symétrique non nul et non inversible
B) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
C) f est un endomorphisme non symétrique non nul et inversible
D) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
E) Autre

**Question 4 :** On note F : $R^3 \to$R l'application définie ,pour *tout* $(x,y) \in R^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^3}$$

A) $F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^3 + 4xy + y^3) + x^3y^2$

B) $F(x,y) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^3) + x^3y^3$

C) $F(x,y) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(x^3 + 4xy + y^2) + x^2y^2$

D) $F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^3y^3$

E) $F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) - x^2y^2$

**Question 5 :** Soit U et V deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $p_2$ *et* $p_1$ . Alors la covariance ( cov ( U , V )) de U et V vérifie :

A) $|\cos(U,V)| \leq \frac{1}{2}$ $B) |\cos(U,V)| \leq 1$ C) $|\cos(U,V)| \leq \frac{1}{4}$ $D)$ $|\cos(U,V)| \leq \frac{1}{3}$ $E)$ Autre

**Question 6** : Pour $n \in N$ , on pose $S_n = \sum_{K=0}^{n} \frac{k+1}{n^2+K^2+2k+1}$ . La suite $(S_n)$ converge vers :

A) $Ln\,2$ B) $\frac{1}{2}\,ln\,2$ C) $-ln\,2$ D) $-\frac{1}{2}\,ln\,2$ E) *Autre*

**Question 7 :** Une variable aléatoire admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in R, f(x) = \frac{a}{1+4x^3}$$

.Pour que f soit effectivement une densité de probabilité , la constante a est :

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3}{\pi}$ E) Autre

**Question 8 :** On dispose de $n$ urnes $U_1 U_2 \ldots\ldots\ldots U_n$. Pour tout k de $\{1, 2, \ldots\ldots n\}$,l'urne k contient k boules numérotés de 1 à K .On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard .Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée. Alors la variance de Y est :

A) $\frac{(n-1)(7n+13)}{144}$ $B)$ $\frac{(n+1)(7n+13)}{144}$ $C)$ $\frac{(n-1)(7n-13)}{144}$ $D)$ $\frac{(2n-1)(7n+13)}{144}$

D) Autre

***Question 9:*** Soient les matrices P= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ , D = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Et M telle que $P^{-1}$MP=D,

$\forall n \in N^*$: $M^n$est la matrice

A) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2-9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2-9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

B) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2+9(\frac{1}{12})^n & 2+24(\frac{1}{24})^n & 2-9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

C) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2-9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2+9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

D) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2+9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2+9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

***Question 10 :*** Soit $\theta$ un paramétre inconnu strictement positif.On considére une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi de fonction de densité :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta}\left(1-\frac{x}{\theta}\right) & si\ 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Et pour tout n, on pose $Sn = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$ .Alors, le risque quadratique de $Sn$ est :

A)$\frac{2\theta^2}{n}$, B)$\frac{\theta^2}{2n}$, C)$\frac{\theta^2}{n}$, D) $\frac{\theta^2}{3n}$, E) Autre

***Question 11*** : Soient $X_1$, $X_2$ ,$X_3$ trois variables aléatoires réelles ,discrètes et centrées.

$M = E(Xi,Xj) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Et Y une variable aléatoire centrée. On définit la fonction :

$$F(x_1,x_2,x_3) = E\left[\left(Y-\sum_{i=1}^{3} x_i X_i\right)^2\right]$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette un minimum (a,b,c) est :

A) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ B) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ -E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ C) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$

D) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$ E) Autre

**Question 12 :** Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a(x^2)} exp\left\{a\left(\frac{x-1}{x}\right)\right\} & si\ x \in ]0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*et X une variable de fonction de densité f . On pose* $Y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$

$y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$ *ou* [ ] *désigne la partie entiére :*

Une fonction densité de Y est :

A) $\begin{cases} \frac{1}{1-e^{-a}} e^{-ay} & si\ y\in[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ B) $\begin{cases} \frac{a}{1+e^{-a}} e^{-ay} & si\ y\in[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ C) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^{-a}} e^{ay} & si\ y\in[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^{a}} e^{-ay} & si\ y\in[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ E) *Autre*

**Question 13 :** Soit n>0 quelconque $et\ 0 < P < 1$, $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ,suivant la même loi uniforme sur {0, .....,n} et $N_n$ une variable aléatoire indépendante des Xi suivant la loi binomiale B(n,p).

*On pose* $U_n = Max(X_0, \dots\dots, X_n)$, $V_n = \min(X_0 \dots\dots\dots X_n)$ et $W_n = \min(X_0, \dots\dots X_n)$ la fonction $H_n$ de répartition de $W_n$ est :

A)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1-\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

B)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1-\left(1-p\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

C)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1-\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

D) $Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1-\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

E) Autre

***Question 14 :*** Soit E l'espace vectoriel R[$X$] des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et le sous espace vectoriel de E des polynomes de degré inferieur ou égal à 3 .Soit f l'application nul,à tout P de E associe le polynome Q=f(p) définie par Q(X) =P(X) –P(X-1) .On appelle g la restriction de f à F :

A) La dimension de F est 3
B) f est une application linéaire de E dans F ?
C) ker(g)=R
D) la famille (1,X) est une base de Im(g) ?
E) Autre

***Question 15 :*** On considère la fonction numérique f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}\,(1+x)^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$$ Alors :

A) f est continue, dérivable en 0 et f'(0) = -1.
B) f est continue, est non dérivable en 0 .
C) f est continue, dérivable en 0 et f'(0)= 1
D) f est continue en 0
E) f est continue, dérivable en 0 et f'(0) = e

**Question 16 :**On considère la matrice $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\in R_4(R)$

Et u l'endomorphisme associé relativement à la base canonique B de $R^4$. *Pour* $\lambda$ **€R** ,on pose

$E_\lambda=\{\vec{x}\in IR^4\ Tel\ que\ u(\vec{x})=\lambda\vec{x}\}$

A)$\lambda\notin\left\{-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},1\right\}$,alors $E_\lambda$ est réduit au vecteur nul.

B), $\lambda\notin\left\{0,\frac{1}{3},1\right\}$ alors $E_\lambda$ est réduit au vecteur nul.

C) $\lambda\notin\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right\}$ ,alors $E_\lambda$ est réduit au vecteur nul.

D) $\lambda\notin\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right\}$ alors $E_\lambda$ est réduit au vecteur nul.

E) Autre

***Question 17 :*** $M_5(R)$ *désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 5 .On note E l'ensemble des A de la forme :*

$$A=\begin{pmatrix}a+b&0&0&0&b\\b&a&0&0&b\\b&0&a&0&b\\b&0&0&a&b\\b&0&0&0&a+b\end{pmatrix}$$

Ou a et b sont deux réels quelconques. On note $I$ l'élément de E obtenu pour a=1 et b=0 et $J$ celui obtenu pour a=0 et b=1 .Alors, on *a pour p* entier naturel , on a :

**A)** $A^n = a^n I + \left(\frac{(a-2b)^n - a^n}{2}\right) J$ **B)** $A^n = a^n I + \left(\frac{(a+2b)^n + a^n}{2}\right) J$ **C)** $A^n = a^n I - \left(\frac{(a+2b)^n - a^n}{2}\right) J$

**D)** $A^n = a^n I + \left(\frac{(a+2b)^n - a^n}{2}\right) J$ E) Autre

***Question 18:*** Pour tout réel $\alpha$ non nul, on définit la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Alors les valeurs propres de A sont :

A) $\{-\alpha, 2\alpha\}$ B) $\{-\alpha, -2\alpha\}$ C) $\{\alpha, -2\alpha\}$ D) $\{-1,2\}$ E) Autre

***Exercice 19 :*** Soit $X_1$ , .....$X_n$ n variables aléatoirement indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.Pour tout i compris entre 1 et n , on pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & si\ X_i = 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad et\ Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

**Un estimateur sans biais de exp(-$\theta$) est :**

A) $\frac{Z_n}{n} + 1$ B) $\frac{Z_n}{n} - 1$ C) $\frac{Z_n}{n}$ D) $\frac{Z_n}{n-1}$ E)Autre

***Exercice 20 :*** **Pour tout n$\in N^*$,on note $u_n = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] = ln(n)$. Pour tout n$\in N^*$,on note**

**$v_n = u_{n+1} - u_n$.Alors $u_n$ est équivalent, quand n tend vers $+\infty$,à :**

A) $\frac{1}{n^2}$ B) $\frac{1}{n^2}$ C) $\frac{1}{2n^2}$ D) $\frac{-2}{n^2}$ E) $\frac{-1}{2n^2}$

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Algèbre bilinéaire
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Compléments sur les variables aléatoires réelles

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs