Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

Session 2014, filière ECS

Mathématiques II (option S)

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1, 2, 5, 6, 9, 13, 14, 17, 20 : probabilités
- Questions 3, 7, 8, 10, 11, 15 : analyse
- Questions 4, 12, 16, 18, 19 : algèbre linéaire

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2014/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2014

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matérie électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Soit X une variable aléatoire réelle ayant une densité de probabilité f définie par:

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ c\exp(-\frac{x^2}{2}) & si\ x\geq 0\end{cases}$$

où c est une constante (éventuellement à calculer).

La variance de X est égale à:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2\pi}$ C) $1-\frac{2}{\pi}$ D) 1 E) Autre réponse

Question 2: Soit α un réel non nul. On considère la suite $(p_n)_{n>0}$ définie par : $\forall n\in IN^*,\ p_n=\frac{1+\alpha^{n-1}}{4(n-1)!}$ La suite $(p_n)_{n>0}$ définit une loi de probabilité pour α égal à:

A) $2e+1$; B) $2e-1$; C) $\ln(e-2)$ D) $\ln(4-e)$ E) Autre réponse

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ par:

$\forall(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x, y)= xe^{x(y^2+1)}$.

f présente un extremum

A) local en A(1,0); B) local en A(-1,0); C) global en A(-1,0); D) global en A(1,0);

E) Autre réponse

Question 4 : Pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M, et φ l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M de $M_2(R)$ associe

$\varphi(M)=M+{}^tM$.

La dimension du sous-espace vectoriel Im φ est égale à:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre réponse

Question 5 : Soit $(m;\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire réelle ayant une densité de probabilité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ c\exp(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

où c est une constante qui dépend de m et σ (éventuellement à calculer).
On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'espérance mathématique de X est égale à:

A) $|m|$ B) $m + \dfrac{\sigma}{\Phi(\frac{m}{\sigma})\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{m^2}{2\sigma^2})$ C) $m + \dfrac{\sigma\Phi(\frac{m}{\sigma})}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{m^2}{2\sigma^2})$

D) $m + \dfrac{\sigma}{\Phi(\frac{m}{\sigma})\sqrt{2\pi}}$ E) Autre réponse

Question 6 : Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, définie sur IR par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

L'espérance de X est

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ D) $\sqrt{\pi}$ E) Autre réponse

Question 7 : On considère la série de terme général $u_n \quad \dfrac{n^2+n+1}{n!}$

Cette série est convergente de somme:

A) $\dfrac{e}{3}$ *B)* $\dfrac{e}{6}$ *C)* $\dfrac{3e}{5}$ *D)* e *E) Autre réponse*

Question 8 : Soit f la fonction réelle de la variable réelle x définie par $f(x) = (x+1)e^{x}$

Un équivalent de $f(x)-x \quad quand \quad x \to +\infty$ est:

A) $-x$ B) $-\frac{1}{x}$ C) $-\frac{1}{2x}$ D) $\frac{1}{2x}$ E) Autre réponse

Question 9 : Trois enfants A , B , C jouent à la balle .

- Lorsque A a la balle , la probabilité pour qu'il la lance à B est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- Lorsque B a la balle , la probabilité pour qu'il la lance à A est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- C envoie toujours la balle à B

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement : " A (respectivement B , C) a la balle à l'issue du $n^{ième}$ lancer "

On pose : $a_n = p(A_n), b_n = p(B_n), c_n = p(C_n)$.

Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs : c'est par convention le lancer numéro 0

Donc on pose : $a_0 = p(A_0), b_0 = p(B_0), c_0 = p(C_0)$ *avec* $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Il existe une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que:

$\forall n \in N$, $X_n = D^n . X_0$, où :

A) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$ B) $D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ C) $D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$

D) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$ E) *Autre réponse*

Question 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ *et* $u_1 = 1$
et par $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. La suite est strictement positive à partir du rang 1.

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\lim_{n\to+\infty}(v_n) =$

A) $+\infty$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{15+5\sqrt{5}}{16}$ D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ E) Autre réponse

Question 11 : La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $u_n = \frac{n^2(\ln(n+1)-\ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}$ est:

B) $\frac{2e-1}{3}$ C) 2 D) $+\infty$ E) Autre réponse

Question 12 : On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble E des matrices T de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ de dimension égale à:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) Autre réponse

Question 13 : On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. L'intégrale $\int_{2-\sqrt{2}}^{2} \exp(-x^2+4x-2)dx$ est égale à:

A) $e^{-2}\Phi(2)\sqrt{\pi}$; B) $e^2\sqrt{2\pi}\ (\Phi(2)-\frac{1}{2})$; C) $e^2\sqrt{\pi}\ (\Phi(2)-\frac{1}{2})$; D) $\sqrt{2\pi}\ \Phi(2)$;

E) Autre réponse

Question 14 : Soient X_1 *et* X_2 deux variables aléatoires discrètes finies, indépendantes, et de même loi de probabilité, avec:

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad p(X_i = 0) = ____ \;, \quad p(X_i = 1) = \frac{1}{3} \quad et \quad p(X_i = 2) = \frac{1}{2}$$

6

On pose: $S = X_1 + X_2$ *et* $P = X_1 X_2$

Le coefficient de corrélation linéaire de S et P est égal à :

A) 0 B) -1 E) Autre réponse

Question 15 : Pour $n \in IN^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k}{4k^2 - 1}$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers :

A) $e^2 + 1$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{e}{4}$ D) $\ln 2$ E) Autre réponse

Question 16: On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Après avoir montré que A est diagonalisable, on aboutit à A^n pour n entier naturel non nul, égal à:

A) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$

B) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$

C) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^n & 0 \\ 2^n & (-1)^n + 2^n & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^n + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$

D) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2 \times 2^n & 0 \\ (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$;

E) Autre réponse

Question 17: On considère deux pièces truquées A et B ; A donne pile avec la probabilité a ($0 < a < 1$) , et B donne pile avec la probabilité b ($0 < b < 1$).
On choisit une pièce au hasard et on la lance: si on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois ($k \geq 2$) .
La limite de la probabilité de lancer la pièce A au $k^{ième}$ lancer lorsque k tend vers l'infini est égale à:

A) $\frac{b}{a+b}$ *B)* $\frac{1-b}{a-b+1}$ *C)* $\frac{1-a}{1-a+b}$ *D)* $\frac{a}{a+b}$ *E) Autre réponse*

Question 18 On désigne par tr(M) la trace d'une matrice carrée à coefficients réels M.
Soient A et B $\in M_n(\mathbb{R})$, des matrices vérifiant AB − BA = A
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tr (A^p) =

A) tr(A) B) tr(AB) C) 0 D) tr(B) E) Autre réponse

Question 19 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & -4 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$ où λ est un paramètre réel.

et f, l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de IR^3.
Les valeurs de λ pour lesquelles la dimension de Ker f est égale à 1, sont:

A) $\lambda \in \{-1,1,3\}$; B) $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ C) $\lambda \in \left\{-3,\frac{1}{3}\right\}$ D) $\lambda \in \left\{-4,\frac{1}{4},4\right\}$
E) Autre réponse

Question 20 Soient α, β, δ, λ quatre nombres réels vérifiant les conditions:

$$0 \prec \alpha \ ; \ 0 \prec \beta \prec \frac{1}{2}$$

$$0 \prec \delta \ ; Max(0, \ln(2\delta)) \prec \lambda$$

et soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F définie par,

$$F : \begin{matrix} \mathbb{R} \to [0;1] \\ t \mapsto \text{Proba}[X < t] \end{matrix}$$ est la fonction suivante: $F(t) = \begin{cases} \beta \exp(\alpha t) & si \ t \prec 0 \\ 1 & si \ t \in [0;1[\\ 2 & \\ 1 - \delta \exp(-\lambda t) & si \ t \geq 1 \end{cases}$

On appelle médiane de X, tout nombre réel m vérifiant la condition suivante:

$$\text{Proba}[X < m] > \frac{1}{2}$$

$$\text{Proba}[X > m] > \frac{1}{2}$$

Alors l'ensemble des médianes de X est

A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $]0;1[$ C) $]0;1]$ D) $[0;1[$ E) Autre Réponse

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs