Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

Session 2016, filière ECS

Mathématiques II (option S)

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 5, 6, 8, 9, 11, 14, 16 à 18 : algèbre linéaire
- Questions 1, 7, 15, 20 : suites et séries
- Questions 2, 3, 12, 13, 19 : probabilités
- Questions 4, 10 : fonctions de deux variables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2016/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2016

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. **Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. **Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.**
3. **Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.**
4. **Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.**
5. **Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.**
6. **Le barème suivant sera adopté:**

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

ANNALES CONCOURS 2016
KABBADJ MEHDI

148

Question 1 : Soient a un nombre réel strictement supérieur à 0,7 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 6}{10u_n - 7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) =$

A) 0,5 B) 1 C) $\dfrac{10a-6}{10a-7}$ D) 1,2 E) Autre réponse

Indication : On pourra commencer par étudier les variations de

$f :]\frac{7}{10}, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{10x-6}{10x-7}$ puis considérer les sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_{2n}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$, et enfin voir les valeurs de x pour lesquelles $f \circ f(x) \succ x$.

Question 2 : Soient X_1, X_2, et U trois variables aléatoires réelles telles que :

. Pour chaque $i \in \{1,2\}$ X_i et U sont indépendantes

. X_1 (respectivement X_2) suit une normale de moyenne m_1 (respectivement m_2) et d'écart-type σ_1 (respectivement σ_2) où $(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2) \in \times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$

. U suit une loi uniforme sur l'intervalle [0 , 1] de $\mathbb{R}$.

On définit une nouvelle variable aléatoire réelle X par

$$X = \begin{cases} X_1 \text{ si } U \in [0\,;\, \frac{1}{2}[\\ X_2 \text{ si } U \in [\frac{1}{2}\,;\, 1] \end{cases}$$

La variance de X est

A) $\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ B) $\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\frac{1}{2}(m_1-m_2)^2$ C) $\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\frac{1}{4}(m_1-m_2)^2$

D) $\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\frac{1}{2}(m_1+m_2)^2$ E) Autre réponse

Question 3 : Soit N un entier naturel non nul. Une urne contient 2N boules numérotées de 1 à 2N. On tire au hasard et avec remise n fois une boule de l'urne ($n\in\mathbb{N}^*$). On désigne par p_n la probabilité que le plus petit numéro tiré soit égal à N.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{p_{n+1}}{p_n}) =$

A) $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{N})$ B) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{N})$ C) $\frac{1}{2N}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

ANNALES CONCOURS 2018
KABBADJ MEHDI

149

Question 4 : soit $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y(\ln^2 y + x^2)$ On désigne par E l'ensemble des points de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ où f admet un extrémum local.

E=

A) $\varnothing$ B) $\{(0,1)\}$ C) $\{(0, 1/e^2)\}$ D) $\{(0,1), (0, 1/e^2)\}$ E) Autre réponse

Question 5 : Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}_+$ de degré au plus égal à 2.

Soit $\mathfrak{B}=(e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E :

$e_0:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ $e_1:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ $e_2:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

On munit E de la structure euclidienne associée au produit scalaire f suivant :

$f:E\times E \to \mathbb{R}$

$(p,q) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}p(t)q(t)\mathrm{d}t$

On note φ_1 (respectivement φ_2) les endomorphismes de E définis comme suit :

$\varphi_1:E \to E$, $p \mapsto p'$ (pour p∈E, p′ désigne la fonction dérivée de p)

Pour p∈E et $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ \varphi_2(p)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x p(t)\mathrm{d}t \text{ si } x \neq 0 \\ p(0) \text{ si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par u l'élément de E définie par

$u:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1+x+x^2$. On note D le sous espace vectoriel engendré par u et P le sous espace vectoriel orthogonal à D (relativement au produit scalaire f).

Enfin, on désigne par φ l'endomorphisme de E défini comme suit :

. la restriction de φ à D coïncide avec celle de φ_1

. la restriction de φ à P coïncide avec celle de φ_2

La matrice de φ relativement à $\mathfrak{B}$ est :

A) $\frac{1}{135}\begin{bmatrix} 135 & 0 & 0 \\ -18 & 108 & 144 \\ -4 & -9 & 13 \end{bmatrix}$ B) $\frac{1}{135}\begin{bmatrix} 135 & 0 & 0 \\ 18 & 108 & -144 \\ -4 & -9 & 13 \end{bmatrix}$ C) $\frac{1}{135}\begin{bmatrix} 135 & 0 & 0 \\ 18 & -108 & 144 \\ -4 & -9 & 13 \end{bmatrix}$

D) $\frac{1}{135}\begin{bmatrix} 135 & 0 & 0 \\ 18 & 108 & 144 \\ -4 & -9 & 13 \end{bmatrix}$ E) Autre réponse

Indication : On pourra commencer par évaluer $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ (n ∈ ℕ) en cherchant une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

ANNALES CONCOURS 2018
KABBADJ MEHDI

150

Question 6 : On considère la matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}$ et $E=\mathbb{R}^3$, dont on notera les vecteurs en colonne.

Soit F l'ensemble défini par : $F=\{X\in E / AX=0\}$

F est un espace vectoriel de base :

A) $\{(5,-7,-1)\}$ B) $\{(5,7,-1)\}$ C) $\{(5,7,1)\}$ D) $\{(-5,7,-1)\}$ E) Autre réponse

Question 7 :

On considère la série de terme général

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=$

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) Autre réponse

Question 8 :

On considère les matrices :

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ et $M=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$

M commute avec A si et seulement si :

A) $\begin{cases}x=y\\ z=\frac{3}{2}y\end{cases}$ B) $\begin{cases}z=\frac{3}{2}y\\ t=x+\frac{3}{2}y\end{cases}$ C) $\begin{cases}x=\frac{3}{2}y\\ t=x+\frac{3}{2}z\end{cases}$ D) $\begin{cases}x=y=2z\\ t=x+\frac{3}{2}y\end{cases}$ E) Autre réponse

ANNALES CONCOURS 2018
KABBADJ MEHDI

151

Question 9 :

On considère la matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & -5 & 6\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}$

Il existe une suite de réels (a_p) telle que $A^p=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2a_p & 1-2a_p & 2a_p\\ a_p & -a_p & a_p+1\end{bmatrix}$ avec $a_p =$

A) 2^p B) $(-2)^p$ C) $1+(-2)^p$ D) $1-2^p$ E) Autre réponse

Question 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ par : $f(x,y)=x\frac{e^{-x}}{y}+\frac{y}{e}$

f présente un extremum

A) local en (1,1) B) global en (1,1) C) local en $(1,\frac{1}{e})$ D) global en $(1,\frac{1}{e})$ E) Autre réponse

Question 11 :

On considère l'espace vectoriel $M_2(R)$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels .

Soient les matrices : $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

On définit $\Delta=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} ; (a,b,c)\in R^3\right\}$

(A , B , C) est une base de l'espace vectoriel Δ .
Pour toute matrice M de Δ , on note φ (M) = TMT
La matrice de l'endomorphisme φ dans la base (A , B , C) de Δ est :

A) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *B)* $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *C)* $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *D)* $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ *E) Autre réponse*

Question 12 :

Une épreuve sportive consiste à atteindre une cible partagée en trois cases notées 1 , 2 , 3 .
Deux concurrents A et B sont en présence , on admet qu'à tout coup chacun d'eux atteint une case et une seule .
Pour le concurrent A , les probabilités d'atteindre les cases 1 , 2 , 3 sont , dans cet ordre , en progression arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.
Pour le concurrent B , les trois éventualités sont équiprobables .
On choisit un des deux concurrents , en admettant que la probabilité a priori de choisir A est moitié de la probabilité de choisir B . Le concurrent choisi atteint alors la case 3 .
La probabilité que ce concurrent soit A est :

A) $\frac{1}{3}$ *B)* $\frac{2}{9}$ *C)* $\frac{7}{15}$ *D)* $\frac{1}{4}$ *E) Autre réponse*

ANNALES CONCOURS 2018
KABBAJ MEHDI
152

Question 13 :

Soit X une variable aléatoire discrète infinie dont la loi de probabilité est définie par :

$$X(\Omega)=N \quad et \quad \forall n \in N^*,\ p(X=n)=\frac{4}{n}\ p(X=n-1)$$

La variance de X est alors égale à :

A) $\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{16}$ *C)* $\frac{3}{4}$ *D)* 4 *E) Autre réponse*

Question 14 :

Soit la matrice $M(a)=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix}$, où a est un paramètre réel .

La matrice M (a) admet une valeur propre double si :

A) $a=2$ *ou* $a=7$ *B)* $a=1$ *ou* $a=7$ *C)* $a=2$ *ou* $a=3$ *D)* $a=1$ *ou* $a=3$
E) Autre réponse

Question 15 :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^6+x^2+1)^{1/6}-(x^4+1)^{1/4}\right]=$$

A) $-\infty$ *B)* 0 *C)* $+\infty$ *D)* 1 *E) Autre réponse*

Question 16 :

Soit f l'application linéaire de IR^3 dans IR^4 définie par :

$$f(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 2x-y+3z,\ x+2y+z,\ -x+2y-z)$$

Soit U = (0, 2 , α , α) un vecteur de IR^4, où α est un nombre réel. Le vecteur U appartient au sous espace vectoriel Im f pour α égal à :.

A) 3 B) - 2 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Question 17 :

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1+\beta \\ -1 & -1-\beta & -1-\beta \end{pmatrix}$ où β est un paramètre réel.

Les valeurs propres de M sont :

A) $\{-2,\ 2\}$ B) $\{\beta,\ 1-\beta\}$ C) $\{\beta,\ 2\beta\}$
D) $\{-1,\ 1-\beta\}$ E) Autre réponse

ANNALES CONCOURS 2018
KABBADJ MEHDI

153

Question 18 :

Soient les matrices carrées:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad M \quad \text{telle que} \quad P^{-1}MP = D$$

$\forall\ n \in IN^*$: le vecteur $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est égal à :

A) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 18+4\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 9+2\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 6-6\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$ B) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9+4\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 6+2\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 6-6\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$ C) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 18+2\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 9+3\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 6+6\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$

D) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 18-4\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 9+4\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2-3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 19 :

On dispose d'une urne contenant N-1 boules blanches et une boule noire, les boules sont indiscernables au toucher. On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans l'urne.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Pout tout entier $k \geq 2$, la probabilité P (T = k) est égale à :

A) $\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^k + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^k$ B) $\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$

C) $\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}$ D) $\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^k + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}$ E) Autre réponse

Question 20 :

Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^k + \frac{3^k}{k!}\right]$

La suite (S_n) converge vers :

A) $3e^3 + \frac{1}{4}$ B) $3e^2 + \frac{15}{64}$ C) $3e^3 - \frac{15}{64}$ D) $\frac{3}{5}e$

E) Autre réponse

ANNALES CONCOURS 2018
KARRADJ MEKKI

154

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Algèbre bilinéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs