Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

Session 2018, filière ECS

Mathématiques II (option S)

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1 à 4, 10, 16, 17 : analyse
- Questions 5, 7, 8, 11 à 13, 20 : probabilités
- Questions 6, 9, 15, 18, 19 : algèbre linéaire
- Question 14 : fonctions de deux variables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2018/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

GROUPE ISCAE

CONCOURS D'ACCES AU PROGRAMME GRANDE ÉCOLE (GRADE MASTER)

- Groupe ISCAE –

Année Universitaire : 2018/2019

Epreuve de :

Mathématiques II

Durée : 3H

Lundi 28 mai 2018

De 09h00 à 12h00

INSTRUCTIONS

- Veiller à mettre votre Nom /Prénom et N° d'examen sur chaque copie.

Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2018

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$; on admettra que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$\lim_{n\to+\infty}[n(\frac{\pi^2}{6}-S_n)]=$

A) 0 B) -1 C) +1 D) $+\infty$ E) Autre Réponse

Indication : On pourra commencer par chercher un encadrement de $\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ en utilisant

$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ $(n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\})$.

Question 2 : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}(\sqrt{1+x^{\alpha}}-x^{\alpha/2})dx$

$I(\alpha)$ est convergente si et seulement si

A) $\alpha>0$ B) $\alpha>1$ C) $\alpha\geq 1$ D) $\alpha\geq 2$ E) Autre Réponse

Question 3 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+5)^n}$

Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=$

A) $\frac{2^{4n-5}[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}\pi$ B) $\frac{2^{4n-5}(n!)^2}{(2n-1)!}\pi$ C) $\frac{(2n-2)!}{2^{4n-3}[(n-1)!]^2}\pi$

D) $\frac{(2n-1)!}{2^{4n-3}(n!)^2}\pi$ E) Autre Réponse

Indication : On pourra commencer par écrire le polynôme x^2+2x+5 sous forme canonique pour ramener le calcul de I_n à celui de $J_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$; puis à l'aide d'une intégration par parties, on trouvera une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n.

Question 4 : $\lim_{x\to+\infty}[nx^{\frac{n-1}{n}}(\sqrt[n]{\ln(e^{x+1}-e^{-x})}-\sqrt[n]{x})]=$

A) -1 B) 0 C) +1 D) n E) Autre Réponse

Indication : A défaut d'effectuer un développement limité, on pourra songer à utiliser l'identité remarquable : $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1})=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k$ valable pour a et b réels quelconques.

Question 5 :) Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}$, représentant la densité de probabilité de la loi uniforme sur [0 ; 1]. Pour x réel quelconque, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t$.

$\varphi(x)$ est défini

A) pour tout x réel par $\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \prec 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in [0;2] \\ 0 \text{ si } x \succ 2 \end{cases}$

B) pour tout x réel par $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 2-x & \text{si } x \in]1;2] \\ 0 & \text{si } x \succ 2 \end{cases}$

C) pour tout x réel par $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec 0 \\ 4x & \text{si } x \in [0;\frac{1}{2}] \\ 4(1-x) & \text{si } x \in]\frac{1}{2};1] \\ 0 & \text{si } x \succ 1 \end{cases}$

D) pour tout x réel par $\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \prec 0 \\ 1 \text{ si } x \in [0;1] \\ 0 \text{ si } x \succ 1 \end{cases}$

E) Autre Réponse

Question 6 : On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^5$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La dimension de Ker (f) (noyau de f) est égale à :

A) 1 *B*) 2 *C*) 3 *D*) 4 *E*) *Autre réponse*

Question 7 : Dans un jeu , on lance successivement deux dés équilibrés , à six faces numérotées de 1 à 6 .
On note :

D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé ,
E_1 l'événement : « $D_1 < D_2$ » , E_2 l'événement : « $D_1 = D_2$ » et E_3 l'événement « $D_1 > D_2$ »

Lors d'une partie ,

Si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point ,
Si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points ,
Si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point .

Le joueur répète n fois ce jeu . Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie.
S_i le nombre total de points marqués après i parties .

En moyenne , le nombre de parties au minimum que doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points est égal à :

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) Autre réponse

Question 8 : Soit X_σ la variable aléatoire absolument continue ayant pour densité de probabilité la fonction f_σ définie par :

$$\forall x \in R \quad , \quad f_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{\sigma^2}\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

X_σ admet une variance dont la valeur est :

A) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\ \sigma^2$ *B)* $(2-\dfrac{\pi}{2})\ \sigma^2$ *C)* $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\ \sigma^2$ *D)* $(5-\pi)\ \sigma^2$ *E) Autre réponse*

Question 9 : Soit n un entier naturel non nul , on considère $E = \mathbf{R_n}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad et \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad , \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}$$

On admettra que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et que pour tout entier k appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a :
$P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$, *où* P_k' *est la dérivée de* P_k .
On considère l'endomorphisme u de E définie par :
$\forall P \in E \quad , \quad u(P)(X) = P'(X+1)$
Soit A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.
Le rang de A est alors égal à :

A) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ B) n C) n-1 D) n+1 E) Autre réponse

Question 10 : On considère :

la fonction φ définie sur R_+^* par :

$$\forall t \in R_+^* \quad , \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t)-1}{t} - t\ (\exp(\frac{1}{t})-1)$$

la fonction Ψ définie sur R_+^* par :

$$\forall t \in R_+^* \quad , \quad \Psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln t$$

Soit $t \in R_+^*$. La somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Psi(t^{n-1})}{n!}$ est égale à :

A) $2\varphi(t) - \ln(t)$ *B)* $\varphi(t) - \ln(t)$ *C)* $\varphi(t) - 2\ln(t)$
D) $5\varphi(t) - \ln(t)$ *E) Autre réponse*

Question 11 Une urne contient 12 boules noires et 2 boules blanches.

Le nombre de boules qu'il faut tirer simultanément pour que la probabilité d'avoir au moins une boule blanche dépasse 5/6 est :

A) 8 B) 3 C) 7 D) 9 E) Autre réponse

Question 12 : On considère dix jetons indiscernables au toucher. Six d'entre eux portent le chiffre 0 et les quatre autres portent le chiffre 1. On tire trois jetons au hasard et on note X la variable aléatoire associée à la somme des chiffres obtenus et Y la variable aléatoire associée au plus grand des trois chiffres.

Le coefficient de corrélation entre X et Y est :

A) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ B) $\frac{0,2\sqrt{14}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{70}}{420}$ D) $\frac{\sqrt{14}}{5}$ E) Autre réponse

Question13 : Hakim et Nora jouent à un jeu de société dans lequel il n'y a pas d'égalité. Les deux joueurs ont la même probabilité de gagner la première partie. En revanche, si Hakim gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est de 0,7 ; s'il perd, la probabilité qu'il perde la suivante est de 0,9. Hakim et Nora jouent plusieurs parties.

n étant un entier naturel, on note G_n l'évènement « Hakim gagne la nième partie », et p_n sa probabilité

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $q_n = p_n - \frac{1}{4}$

Après avoir établi une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, on montre que :

A) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique et La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$

B) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$

C) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{4}$

D) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique et La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{4}$

E) Autre réponse

Question 14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = \int_0^{+\infty} (1+xt+yt^2)^2 e^{-t}\,dt$$

f présente un extremum :

A) local en $A(1,\frac{1}{6})$ B) local en $A(1,-\frac{1}{6})$ C) global en $A(-1,-\frac{1}{6})$ D) global en $A(-1,\frac{1}{6})$

E) Autre réponse

Question 15 : On considère les matrices de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\-5&9&0\\-5&5&4\end{pmatrix} \text{ et } I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Après avoir déterminé deux matrices P_1 et P_2 telles que : $P_1+P_2=I_3$ et $4P_1+9P_2=A$

On montre que pour tout entier naturel k, la matrice A^k s'écrit sous la forme :

A) $A^k=4^kP_1P_2^k+9^kP_2$ B) $A^k=4^kP_1+9^kP_2P_1^k$ C) $A^k=4^kP_1+9^kP_2$ D) $A^k=4^kP_1P_2^k+9^kP_2P_1^k$

E) Autre réponse

Question 16 Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x\frac{t^2}{1+t^8}dt$

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $+\infty$ E) Autre réponse

Question 17 : Pour tout $n\in IN$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{2^k}{k!}\right]$

La suite (S_n) converge vers :

A) $e^2+\frac{1}{4}$ B) e^2 C) $3e^3-1$ D) $\frac{3}{5}$ E) Autre réponse

Question 18 : Soient les matrices :

$$P=\begin{pmatrix}1&2&6\\0&1&3\\-1&-3&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{12}&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \textit{et } M \textit{ telle que } M=PDP^{-1}$$

$\forall\ n\in\mathbb{N}^*$: le vecteur $M^n\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est égal à :

A) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}12-\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\\6-6\left(\frac{1}{12}\right)^n\\4+18\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}$ B) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9+2\left(\frac{1}{12}\right)^n\\6+2\left(\frac{1}{12}\right)^n\\6-3\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}$ C) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8+2\left(\frac{1}{12}\right)^n\\9-3\left(\frac{1}{12}\right)^n\\6+2\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}$ D) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0\\2+4\left(\frac{1}{12}\right)^n\\2-\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}$

E) Autre réponse

Question 19 : Soit λ un nombre réel et on considère les vecteurs suivants :

$u = (2, 3, -1)$; $v = (\frac{\lambda}{2}, 2, 1)$; $w = (\lambda, \lambda, -1)$

Pour quelles valeurs de λ , la dimension du sous espace vectoriel engendré par les vecteurs u , v et w est égale à 2 ?

A) $\lambda \in \{1, 8\}$ B) $\lambda \in \{2, 4\}$ C) $\lambda \in \{0, \frac{3}{2}\}$ D) $\lambda \in \{\frac{1}{2}, 3\}$

E) Autre réponse

Question 20 : Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité vérifie :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{4}{n} P(X = n-1)$

L'espérance de X est égale à :

A) 2 B) 4 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Aure réponse

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs