Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

Session 2019, filière ECS

Mathématiques II (option S)

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1, 8, 9, 11, 19, 20 : algèbre linéaire
- Questions 5 à 7, 13, 14 : intégrales et limites
- Questions 2, 4, 10, 12, 15 à 18 : probabilités et dénombrement
- Question 3 : fonctions de deux variables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2019/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2019

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. **Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. **Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.**
3. **Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.**
4. **Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.**
5. **Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.**
6. **Le barème suivant sera adopté :**

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Soient A et P les matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&1&3\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Après avoir déterminé P^2 et la matrice D telle que : $D = P^{-1} A P$, déduire que pour tout entier naturel n, A^n est égale à :

A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\2^n&2^n&0\\3^n-3&3^n-2^n&3^n\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3^n-2&0&0\\2^n&2^n&0\\3^n-2^{n+1}+1&3^n-2^n&3^n\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\2^{n+1}-2&2^n&0\\3^n-2^{n+1}+1&3^n-2^n&3^n\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\2^{n+1}-2&2^n&0\\3^n-3&3^n-2^n&2^n+1\end{bmatrix}$

E) Autre réponse

Question 2 : Une entreprise spécialisée dans la chaudronnerie propose 3 types de tenues de travail numérotés T1 à T3 à ses n ouvriers où n est un entier naturel non nul. Chacun des ouvriers choisit exactement un type de tenue au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande au responsable atelier. Le responsable réceptionne pour chacun des n ouvriers le bon de commande et livre la tenue choisie. On suppose que les choix de tenues sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k tel que $1 \le k \le n$, on note :

A_k l'évènement « Après réception du kième bon, un seul type de tenue a été choisi »

B_k l'évènement « Après réception du kième bon, exactement deux types de tenue ont été choisis »

C_k l'évènement « Après réception du kième bon, les trois types de tenue ont été choisis »

On pose : $a_k = p(A_k)$, $b_k = p(B_k)$, $c_k = p(C_k)$

Le tableau suivant donne un exemple de choix de type de tenues de travail pour les cinq premiers bons reçus.

	1er bon	2ème bon	3ème bon	4ème bon	5ème bon
Numéro tenue choisie	N°2	N°1	N°2	N°1	N°3

B2 est réalisé, C4 n'est pas réalisé, C5 est réalisé

Pour tout entier naturel non nul n, on a :A) $\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ c_n = 1-\dfrac{2^n-1}{3^{n-1}} \end{cases}$ B) $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \dfrac{2^n}{3^{n-1}} \\ c_n = 1-\dfrac{2^n-1}{3^{n-1}} \end{cases}$

C) $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ c_n = 1-\dfrac{2^n}{3^{n-1}} \end{cases}$ D) $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ c_n = 1-\dfrac{2^n-1}{3^{n-1}} \end{cases}$ E) Autre réponse

Indication : Déterminer la matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$, puis déduire $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y$$

Les seuls points critiques de f sont :

A) $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ B) $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ et $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$ C) $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$

D) $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ E) Autre réponse

Question 4 : Soit a un nombre réel strictement positif et Z_a une variable aléatoire admettant la fonction densité de probabilité g_a définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Z_a admet une espérance égale à :

A) $a\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ B) $a\sqrt{\pi}$ C) $\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$ D) $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ E) Autre réponse

Question 5 : a et b étant des entiers naturels, le réel $I_{a,b}$ défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx \quad \text{est égal à :}$$

A) $\frac{(a+b)!}{a!b!}$ B) $\frac{a!b!}{(a+b+1)!}$ C) $\frac{a!}{(a+b)!}$ D) $\frac{(a+1)!b!}{(a+b)!}$ E) Autre réponse

Indication : On pourra commencer par calculer $I_{a,0}$; puis établir une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a+1,b-1}$

Question 6 :

Soit $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx$, où $n \in N$.

On admettra que l'intégrale I_n existe .

Après avoir calculé I_n en fonction de n , vérifier que I_5 est égale à :

A) -30 B) 60 C) -120 D) 240 E) Autre réponse

Question 7 :

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \, dt \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) \, dt$$

On admettra que I et J convergent, et que , I = J .

Après avoir calculé I + J, on en déduit que I = J =

A) $-\frac{\pi}{6}\ln 3$ *B)* $-\frac{\pi}{2}\ln 2$ *C)* $-\frac{\pi}{4}\ln 5$ *D)* $-\frac{\pi}{12}\ln 7$ *E) Autre réponse*

Question 8 :

Soit $E = \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes , et φ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$$

On note V l'ensemble des valeurs propres de φ . V est alors égal à :

A) $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ *B)* $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ *C)* $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ *D)* $\{1\}$ *E) Autre réponse*

Question 9 :

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

Soit M l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'endomorphisme f est diagonalisable.
M est alors égal à :

A) $\mathbf{R} - \{2\}$ B) $\mathbf{R} - \{1\}$ C) $\mathbf{R} - \{1, 2\}$ D) $\mathbf{R} - \{0{,}5\}$ E) Autre réponse

Question 10 :

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2 .
On dispose d'une urne contenant 2n boules numérotées de 1 à n , chaque numéro apparaissant deux fois . On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules , si les deux boules tirées portent le même numéro , on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée .
- si les deux boules portent des numéros différents , on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant .

Pour tout élément i de $[1, n]$, et tout entier naturel k non nul , on pose $Z_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour reconstituer i paires .
On admet qu'il existe un espace probabilisé (Ω, A, p) permettant de modéliser cette expérience et que , pour tout entier i de $[1, n]$, Z_i est une variable aléatoire définie sur cet espace .
L'espérance mathématique de Z_1 est alors égale à :

A) 2n-1 B) $n(2n+1)$ C) $2n(2n+1)$ D) n+3 E) Autre réponse

Question 11:

Soient les matrices :

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} . \quad et \quad A=2I+J$$

Après avoir exprimé J^n en fonction de n, pour tout $n \in IN^*$ et sachant que A et J commutent, montrer que A^n est égale à :

A) $2^n I + n\,2^{n-1} J + \frac{1}{2} n\, J^2$ B) $2^n I + n\,2^{n-1} J + \frac{1}{2} n(n-1)2^{n-2} J^2$

C) $\frac{1}{2} I + \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) J$ D) $\frac{1}{2}(n-1)2^n J^2$ E) Autre réponse

Question 12 :

Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station - service est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

xi	0	1	2
pi= p(X=xi)	0,1	0,5	0,4

Dans cette station – service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients.
La probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence est égale à :

A) 0,518 B) 0,5 C) 0,45 D) 0,1 E) Autre réponse

Question 13 :

Soit la suite définie, pour tout n ∈ IN, par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k-2}{3^{k-1}}$

La limite de la suite u_n est égale à :

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{27}{4}$ E) Autre réponse

Question 14 :

Soit f la fonction définie sur [0, $+\infty$ [par : $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est égale à :

A) 1 B) $+\infty$ C) 2ln2 D) 0 E) Autre réponse

Question 15 :
Déterminer le nombre de numéros de téléphones à 10 chiffres tels que , le numéro est formé de deux chiffres 1, deux chiffres 3, six chiffres 7.

A/ 1500 ; B/ 2000 ; C/ 1260. ; D/ 500 ; E/ Autre réponse

Question 16 : Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité une fonction *f*. On suppose que X a une espérance mathématique et une variance respectivement égales à m et σ^2. On désigne par ε un nombre réel quelconque appartenant à l'intervalle]0,1[et on pose $a = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. On définit une nouvelle variable Y dont la densité est la fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto (1-\varepsilon) f(x) + \varepsilon b f(\frac{x}{a})$, où b est une constante strictement positive à éventuellement calculer en fonction de ε.
La variance de Y est égale à :

A) $(m^2+\sigma^2)\frac{2+2\varepsilon}{\varepsilon} - 4m^2$ B) $(m^2+\sigma^2)\frac{1+3\varepsilon}{\varepsilon} - 4m^2$ C) $(m^2+\sigma^2)\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon} - 4m^2$

D) $(m^2+\sigma^2)\frac{3+5\varepsilon}{2\varepsilon} - 4m^2$ E) Autre Réponse

Question 17 : Un point est choisi au hasard sur un segment de longueur L.
La probabilité que le rapport entre le plus petit et le plus grand sous-segment soit inférieur à $\frac{1}{4}$ est égale à :

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) Autre Réponse

Question 18 : Un automobiliste doit remplacer une pièce de sa voiture. La pièce qu'il va acheter est soit piratée, soit originale. On estime qu'il a une probabilité de $1/4$ d'acheter une pièce piratée et une probabilité de $3/4$ d'acheter une pièce originale. La durée de vie de la pièce est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, de moyenne 2 pour une pièce piratée, et de moyenne 5 pour une pièce originale. On suppose que la pièce a survécu jusqu'au temps t après son installation, et on note dans ce cas $\varphi(t)$ la probabilité qu'elle soit piratée.

Un équivalent de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$ est

A) $\frac{1}{2}e^{-0,3t}$ B) $\frac{1}{4}e^{-0,3t}$ C) $\frac{1}{3}e^{-0,3t}$ D) $\frac{1}{4}e^{-0,2t}$ E) Autre Réponse

Question 19 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, dont la matrice dans la base canonique est $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 5 & 5 & -2\end{bmatrix}$. On désigne par $\vec{u}$ le vecteur (1,1,1). On rappelle que pour $n\in\mathbb{N}$, f^n désigne f composée par elle-même n fois (f^0 étant l'application identique). Le produit scalaire canonique est noté (. | .).

$\lim_{n\to+\infty}(3^{-n}f^n(\vec{u})\,|\,\vec{u})=$

A) $+\infty$ B) 0 C) 3 D) 4 E) Autre Réponse

Indication : On pourra considérer la matrice de f dans la base $(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})$ où $\begin{cases}\vec{u_1}=(1,0,1)\\ \vec{u_2}=(0,0,1)\\ \vec{u_3}=(0,1,0)\end{cases}$

puis on pourra calculer T^n où $T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$. On remarquera que l'on pourra écrire T^n sous la forme $\begin{pmatrix}3^n & 0 & a_n\\ 0 & (-2)^n & b_n\\ 0 & 0 & c_n\end{pmatrix}$ où $a_n, b_n,$ et c_n seront calculés en cherchant une relation de récurrence entre T^{n+1} et T^n; Une relation de récurrence liant a_{n+1} à uniquement a_n, et n, sera trouvée, et dont trouvera une solution particulière sous forme de suite géométrique : ce qui permettra de trouver la solution générale de cette relation de récurrence et l'expression de a_n.

Question 20 : Soit (a, b)$\in\mathbb{R}^2$. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur le corps $\mathbb{R}$, à une indéterminée X, de degré au plus égale à 2. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X], P(X)\mapsto P(X+a)+P(X+b)-(a+b)P'(X)$ où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

f est diagonalisable si et seulement si

A) $(a,b)=(1,1)$ B) $(a,b)=(0,0)$ C) $(a,b)=(0,0)$ ou $(a,b)=(1,1)$ D) $a+b=1$

E) Autre Réponse

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Algèbre bilinéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs