Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

Session 2020, filière ECS

Mathématiques II (option S)

Durée : 2 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1, 9 à 11, 13 : probabilités
- Questions 2, 7, 8, 12 : algèbre
- Questions 3 à 6, 14 : analyse

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2020/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2020

MATHEMATIQUES II

DUREE : 2 heures

N.B :

1. **Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. **Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.**
3. **Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.**
4. **Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.**
5. **Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.**
6. **Le barème suivant sera adopté :**

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 14 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Soit $n \geq 3$ et soient $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ des variables aléatoires indépendantes sur l'espace probabilisé (Ω , $\mathcal{A}$, p) suivant toutes la loi uniforme sur] 0 , a] , a > 0 . On pose alors :

$X_i = \dfrac{1}{Z_i}$

Soit $Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$

Après avoir vérifié que X_1 est une variable aléatoire à densité et déterminé une densité de X_1 , en déduire que Y_n est une variable à densité , et qu'une densité de Y_n est définie par :

A) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{a^n x^n} & si\ x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

B) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{n+1}{a^{n+1} x^n} & si\ x \geq \dfrac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

C) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{a x^2} & si\ x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

D) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{a^n x^{n+1}} & si\ x \geq \dfrac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

E) Autre réponse

Question 2 : Soit p la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x + 2y + 3z = 0$.

La matrice de p dans la base canonique est alors :

A) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ B) $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ C) $\dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 10 & 5 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\dfrac{1}{42}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 3 : Un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la fonction $H(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^x - 1$ *est* :

A) $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}$ B) $\dfrac{e^x - 1}{x}$ C) $\dfrac{x}{\ln(x)}$ D) $\dfrac{1}{\ln(x)}$ E) *Autre réponse*

Question 4 : Après avoir déterminé les valeurs de a et b pour lesquelles $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \, dx$ est minimale , vérifiez que ce minimum est égal à :

A) $\frac{1}{25}$ *B)* $\frac{4}{225}$ *C)* $\frac{7}{125}$ *D)* $\frac{2}{255}$ *E) Autre réponse*

Question 5 : Soient $(a\ ,\ b)\in\mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$(u_0, v_0) = (a,b) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$

A) $\frac{6a+5b}{11}$ B) $\frac{3a+8b}{11}$ C) $\frac{7a+4b}{11}$ D) $\frac{6a+4b}{10}$ E) Autre réponse

Indication : On pourra considérer la suite $(w_n = u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et voir les relations existantes entre d'une part w_{n+1} et w_n, et d'autre part entre $u_{n+1} - u_n$ et w_n.

Question 6 : soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres entiers définis par :

$(F_0, F_1) = (0,1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

On pose pour tout ***n*** entier **≥ 1**, $a_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} =$$

A) 0 B) 1 C) $-\frac{2}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) Autre réponse

Indication : On pourra considérer le vecteur colonne $x_n = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$ et trouver une relation matricielle du type $x_{n+1} = Ax_n$ où A est une matrice indépendante de *n*. Puis on en déduira l'expression de A^n en fonction de F_{n+1}, F_n, et F_{n-1}.

Question 7 : Soit ***n*** un entier naturel. On peut remarquer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(\forall \theta \in \mathbb{R})\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$.

Pour chaque entier naturel $n \geq 1$, $T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} =$

A) 1 B) 0 C) X^{n-1} D) X^n E) Autre réponse

Question 8 : Soient n un entier ≥ 2 et P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

L'ordre de multiplicité de la racine 1 de P est :

A) 1 B) 2 C) 3 D) n+2 E) Autre réponse

Question 9 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Après avoir démontré que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X, on notera F la fonction de répartition associée.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = F(X)$
Si F^{-1} désigne la fonction réciproque de F, on a alors :

A) F^{-1} est définie sur$]0,1[$, et $\forall x \in]0,1[, F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x}{1+x})$

B) F^{-1} est définie sur$]0,\frac{1}{2}[$, et $\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[, F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x}{1-x})$

C) F^{-1} est définie sur$]0,1[$, et $\forall x \in]0,1[, F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x}{1-x})$

D) F^{-1} n'existe pas E) Autre réponse

Question 10 : Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient une boule noire non numérotée et (n−1) boules blanches dont (n − 2) portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait les boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire, et on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été tirée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon. Les variances respectives de X et Y sont :

A) $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ et $V(Y) = \frac{n^2+1}{2}$ B) $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ et $V(Y) = \frac{1}{4}$

C) $V(X) = \frac{n^2+1}{12}$ et $V(Y) = \frac{n+4}{2}$ D) $V(X) = \frac{n(n-1)}{12}$ et $V(Y) = \frac{n^2}{2}$

E) Autre réponse

Question 11: Soit a un réel strictement positif. Soit g_a la fonction définie sur R par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Si g_a représente la densité de probabilité d'une variable aléatoire notée Z_a, alors la variance de Z_a est :

A) $Var(Z_a) = \frac{(4-\pi)a^2}{2}$ avec $a = \pi$ B) $Var(Z_a) = \frac{\pi a^2}{2}$ et $a \in \mathbb{R}$

C) $Var(Z_a) = \frac{(2-\pi)a^2}{2}$ avec $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ D) $Var(Z_a) = \frac{(4-\pi)a^2}{2}$ avec $a \in \mathbb{R}$

E) Autre réponse
Indication : On pourra utiliser les caractéristiques de la loi normale centrée de variance a^2

Question 12 : On considère les matrices : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $M = D + N$

En vérifiant que les deux matrices D et N commutent et en appliquant la formule du binôme de Newton, calculer M^n .

$\forall$ n$\in$IN* : la matrice M^n est égal à :

A) $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^{2n-1} & n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3n & n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 13 : Soit a un réel. On suppose que le nombre N de skieurs qui se présentent pendant une période T à une remontée mécanique est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

$\forall\, n \in IN$, $P(N=n) = a\,\dfrac{3^n.n}{n!}$

La valeur de a est égale à :

A) $\dfrac{1}{e^3}$ B) $\dfrac{3+e}{e^3}$ C) e D) $\dfrac{1}{3.e^3}$ E) Autre réponse

Question 14 : Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}dx$$

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{e}{2}-1$ C) $\dfrac{3}{2}(e-1)$ D) $e-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) Autre réponse

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Algèbre bilinéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs