Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

Session 2022, filière ECS

Mathématiques II (option S)

Durée : 2 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1, 4, 10, 13 : probabilités et estimation
- Questions 3, 6 à 9, 11, 12 : analyse
- Questions 5, 14 : matrices
- Question 2 : fonctions de deux variables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2022/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2022

MATHEMATIQUES II

DUREE : 2 heures

N.B :

1. **Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. **Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.**
3. **Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.**
4. **Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.**
5. **Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.**
6. **Le barème suivant sera adopté :**

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 14 questions totalement indépendantes.

Question 1 : On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.
Pour tout entier naturel n, on note :

X_n l'événement : "À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face"

Y_n l'événement : "À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face"

Z_n l'événement : "À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile".

De plus on note :

$x_n = p(X_n); y_n = p(Y_n); z_n = p(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n

Alors

A) $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ B) $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ C) $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

D) $y_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ E) Autre réponse

Indication : On pose $b_n = y_n + a$; a étant un nombre réel à déterminer

Après avoir exprimé z_n en fonction de x_n et y_n ; puis y_{n+1} en fonction de y_n, établir la nature de la suite b_n

Question 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par :

$f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$

f admet un maximum global aux points de coordonnées :

A) $(0,1)$ B) $(0,e)$ C) $(0,e^{-2})$ *et* $(0,1)$ D) $(0,e)$ *et* $(0,e^2)$ E) Autre réponse

Question 3 : Soient $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$

Calculer : $\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n (t-\beta)^n dt$

Indication : En posant $I_{m,n} = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m (t-\beta)^n dt$, intégrer par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, puis calculer $I_{0,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

A) $(-1)^{(n+1)} \frac{(\alpha-\beta)^n}{(n+1)\binom{2n}{n}}$ B) $(-1)^{(n+1)} \frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ C) $(-1)^{(n+1)} \frac{(\alpha-\beta)^n}{(n+1)}$

D) $(-1)^{(n+1)} \frac{(\alpha-\beta)^n}{(n+1)^n}$ E) Autre réponse

Question 4 : La durée de vie (en heures) d'un composant est une variable aléatoire continue dont la fonction densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}\exp(-x/100) & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La durée de vie moyenne (en heures) du composant est égale à :

A/ 250 B/ 50 C/ 120 D/ 100 E/ Autre réponse

Question 5 : Soit les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = M - I, \text{ où I est la matrice identité.}$$

Pour tout n $\in$IN, la matrice M^n est égale à :

A/ $I + \frac{4^n + 1}{2} J$ B/ $I + \frac{4^n - 1}{3} J$ C/ $\frac{4^n - 1}{3} I + J$

D/ $2^n I + \frac{4^n - 1}{3} J$ E/ Autre réponse

Question 6 : Pour n $\in$ IN*, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \frac{3^k}{k!}$

La suite de terme général S_n converge vers :

A/ 2 B/ ln 2 C/ $\frac{e^2}{2}$ D/ $3e^3$ E/ Autre réponse

Question 7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx \text{ pour } n \geq 1 \text{ et par } u_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

Un équivalent de $6u_n$ (quand $n \to \infty$) est

A) $\frac{2}{n}$ B) $\frac{3}{n}$ C) $\frac{1}{n}$ D) $\frac{1}{n^2}$ E) Autre réponse

Indication : On pourra commencer par étudier le sens de variation de $f(x) = x^2 + 3x + 2$ pour $x \in [0;1]$, et la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; cela permettra de trouver une minoration de u_n par une valeur v_n s'exprimant simplement et uniquement en fonction de n. On calculera $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n$ en fonction uniquement de n : cela permettra en utilisant la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la minoration v_n, de trouver une majoration de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une valeur w_n s'exprimant simplement et uniquement en fonction de n pour $n \geq 2$.

Question 8 : Soit θ un nombre réel quelconque.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{2^{n+1}} =$$

A) $\frac{2-\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ B) $\frac{2+\cos\theta}{5-4\cos\theta}$ C) $\frac{2-\cos\theta}{5-4\cos\theta}$ D) $\frac{2}{5-4\cos\theta}$ E) Autre réponse

Question 9 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_{2n} = \frac{1}{2^n}$ et $u_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n =$$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) 3 D) $\frac{10}{3}$ E) Autre réponse

Question 10 : Soient a un paramètre réel strictement positif et f la fonction de la variable réelle x définie par

$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{a^3} & \text{si } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La fonction f est une densité de probabilité. On désigne par X la variable aléatoire réelle ayant f pour densité de probabilité et on suppose que le paramètre a est inconnu et que l'on souhaite à l'estimer. Pour n entier ≥ 2, on considère à cet effet un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de n variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées de même loi que X ; on prend comme estimateur de a,

$$Y_n = \frac{4}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On désigne par $R_a(Y_n)$ le risque quadratique commis en estimant a par Y_n.

$$nR_a(Y_n) =$$

A) $\frac{a^2}{5}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{15}$ D) $\frac{a^2}{16}$ E) Autre réponse

Question 11 : Soit $x \in]0,1[$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

Après avoir calculé de deux façons distinctes la dérivée $S_n'(x)$, on pourra calculer $\sum_{k=0}^{n} k\,x^k$

On en déduit alors que la série $\sum_{n \geq 0} n x^n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n =$

A) $\frac{2x}{(1-x)^3}$ *B)* $\frac{x}{3(1-x)^2}$ *C)* $\frac{x}{(1-x)^2}$ *D)* $\frac{3x}{1-x^2}$

E) Autre réponse

Question 12 : On pose pout tout entier n ≥ 0 et tout réel x , $I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$.

$\forall n \geq 0$, $I_n(x) - I_{n+1}(x) =$

A) $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ *B)* $\frac{x^n}{(n+1)!}$ *C)* $\frac{x^{n+1}}{n!}$ *D)* $\frac{x^n}{n}$ *E) Autre réponse*

Question 13 : Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte .Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur .Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre .Son trajet obéit aux règles suivantes :

- Lorsqu'elle est en A au temps t = n , alors , au temps t = n+1 , elle reste en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, ou elle passe en B avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- Lorsqu'elle est en B au temps t = n , alors , au temps t = n+1 , elle retourne en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, ou elle reste en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ou elle sort à l'air libre avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.
- Au temps t = 0 , la guêpe est en A .Lorsqu'elle est sortie , elle ne revient plus .

On note A_n (respectivement B_n , respectivement S_n) les événements : « à l'instant t = n , elle est en A (respectivement en B , respectivement elle sort) » , et , a_n , b_n , s_n leurs probabilités respectives .
Les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques de raison :

A) $\frac{1}{3}$ *B)* $\frac{5}{6}$ *C)* $\frac{2}{7}$ *D)* $\frac{3}{4}$ *E) Autre réponse*

Question 14 : On considère la matrice de $M_3(\boldsymbol{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Soient les 3 vecteurs-colonne suivants :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculé MV_1 , MV_2 et MV_3 , en déduire que le spectre de M est :

A) $S_p(M) = \{ 1 , 3 , 6 \}$ B) $S_p(M) = \{ -2 , 1 , 4 \}$ C) $S_p(M) = \{ -2 , 6 , 9 \}$
D) $S_p(M) = \{ -1 , 1 , 6 \}$ E) Autre réponse

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs