Concours Grande École de l'ISCAE (Institut supérieur de commerce et d'administration des entreprises), Maroc

Session 2024, filière ECS

Mathématiques II (option S)

Durée : 2 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1, 3, 5, 7, 8 : probabilités
- Questions 2, 9, 10, 12 : analyse
- Questions 6, 11, 13, 14 : algèbre linéaire
- Question 4 : fonctions de trois variables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/iscae/ecs/2024/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2024

MATHEMATIQUES II

DUREE : 2 heures

N.B :

. **Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

2. **Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.**

3. **Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.**

4. **Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.**

5. **Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.**

6. **Le barème suivant sera adopté :**

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 14 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,3] et Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$. Nous nous intéressons à la variable aléatoire $Z = X^Y$.

A) La variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance ; B) L'espérance de Z est égale à 3

C) L'espérance de Z est égale à 4 ; D) L'espérance de Z est égale à $\frac{13}{4}$ E) Autre réponse

Question 2 : En supposant que λ est un nombre réel différent de 0, on peut affirmer que $\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt$:

A) Est divergente ; B) Est convergente et égale à λ ; C) Est convergente et égale à $\frac{1}{\lambda^2}$

D Est convergente et égale à 1 ; E) Autre réponse

Question 3 : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessus, p et q étant 2 nombres réels compris entre 0 et 1 éventuellement à déterminer :

X\Y	-1	0	1
-1	p	q	1/16
0	1/16	1/16	1/16
1	1/16	1/16	1/16

L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

A) $-\frac{7}{16}$ B) $\frac{7}{16}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) Autre réponse

Question 4 : Soit la fonction réelle de trois variables $f(x,y,z) = x^2 + 2.x.y.z + 2.y - 2.z$. On peut affirmer que :

A) La fonction f n'admet pas de point critique
B) La fonction f admet un point critique qui n'est pas extremum global
C) La fonction f admet un maximum global
D) La fonction f admet un point critique qui est un extremum global
E) Autre réponse

Question 5 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$. On considère (Y_n) la suite de variables aléatoires donnée par $Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On peut affirmer que :

A) La suite (Y_n) converge en probabilités vers la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$
B) La suite (Y_n) converge en probabilités vers la loi certaine égale à a
C) La suite (Y_n) converge en probabilités vers la loi exponentielle
D) La suite (Y_n) converge en probabilités vers la loi certaine égale à $\frac{b-a}{2}$
E) Autre réponse

Question 6 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et (I,J,K) une base de E. On désigne par f l'endomorphisme défini par :

$$f(x.I+y.J+z.K) = (x-y).I+(2x+y).J+(z-x).K$$

Quel est le noyau de f ?

A) Un plan vectoriel B) Une droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$

C) Une droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x=4 \\ z=0 \end{cases}$ D) Une droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x=-4 \\ z=0 \end{cases}$

E) Autre réponse

Question 7 : Soient X et Y deux variables aléatoires vérifiant :

$$\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ P\left[(X=i)\cap(Y=j)\right]=\frac{1}{j!}\frac{a}{2^{i+j}}$$

Pour que la formule précédente définisse une loi de probabilité conjointe du couple (X , Y), la constante a est :

A) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ C) $\frac{1}{2e}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Question 8 : À un péage autoroutier n voitures franchissant au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières. Sachant que les trois barrières ont la même probabilité d'être franchi, le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X_1 et X_2 est donné par :

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 3 D) 2 E) Autre réponse

Question 9 : Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$

L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge vers :

A) $\frac{\ln 3}{2}$ B) $2\ln 2$ C) $\frac{\ln 2}{3}$ D) $3\ln 5$ E) Autre réponse

Indication : On pourra songer à exprimer simplement $f'(x)+f(x)$, puis à calculer une de ses primitives.

Question 10 : Soit F la fonction réelle de la variable réelle x définie par

$F(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)}$; on remarquera que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Un équivalent de $F(x)$ quand $x\to+\infty$ est

A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{2x}$ C) $\frac{1}{x^2}$ D) e^{-x} E) Autre réponse

Indication : On pourra commencer par calculer $F(x)+F(x+1)$ en fonction de x, puis par étudier la monotonie de F sur $\mathbb{R}_+^*$. La comparaison de $F(x)$ avec $F(x+1)$ permettra de trouver un encadrement de $F(x)$.

Question 11 : Soit n un entier naturel supérieur à 2 et A la matrice carrée d'ordre n définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ & & & (0) & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & & & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la première ligne, la dernière ligne, la première colonne, et la dernière colonne de A ne contiennent que des « 1 » ; tous les autres coefficients de A sont nuls.
Le spectre de A est :

A) $\varnothing$ B) $\{0\}$ C) $\{0, 2-\sqrt{2n-3}, 2+\sqrt{2n-3}\}$ D) $\{0, 4-\sqrt{4n-5}, 4+\sqrt{4n-5}\}$

E) Autre réponse
Indication : On pourra commencer par identifier le rang de A et par identifier trivialement une valeur propre. Par la suite, on écrira le système d'équations de recherche des valeurs propres.

Question 12 : Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. On définit la suite réelle $u(\alpha) = (u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ (l'intégrale est trivialement convergente).

$\lim_{n\to+\infty} (u_n(\alpha)) =$

A) 1 B) α C) $\frac{1}{\alpha}$ D) 0 E) Autre réponse

Indication : On pourra commencer par étudier la monotonie de la suite $u(\alpha)$. Puis on effectuera une intégration par parties pour trouver le lien entre $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)$ et $u_n(\alpha)$ pour en déduire la nature d'une série dont le terme général dépend de $u_n(\alpha)$.

Question 13 : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 5z, 2x - y + 5z, x + 2y, -x + 2y - z)$$

Soit $\boldsymbol{u} = (0, 1, 1, \alpha)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$, où α est un nombre réel. L'ensemble des valeurs de α pour lesquelles le vecteur $\boldsymbol{u}$ appartient au sous espace vectoriel Im(f) de $\mathbb{R}^4$ est

A) $\{\frac{4}{5}\}$ B) $\varnothing$ C) $\{-\frac{2}{5}\}$ D) $\{-\frac{4}{5}\}$ E) Autre réponse

Question 14 : Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1 , U_2 , U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4.

Soient A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui , à toute matrice M de E , associe la matrice AM – MB. $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E .

Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) est alors égale à :

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *B)* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *C)* $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *E) Autre réponse*

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Fonctions réelles : limites et continuité
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/iscae/ecs