Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2000, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1 à 3 : fonctions h, M_p et f
- Questions 4 et 5 : fonction g et suites (a_n), (b_n)
- Questions 6 et 7 : limite de b_n/a_n et équivalent de a_n
- Question 8 : ln 2 n'est pas rationnel

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2000/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 6 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'établir que le réel ln2 est irrationnel.

1. **Fonction** h :

Soit la série entière de terme général $u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ définie par la relation suivante :

$$u_n(x) = C_{2n}^n \, x^n.$$

Rappel : pour tout entier strictement positif n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est le cardinal de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble de n éléments. Par convention : $C_0^0 = 1$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(x)$; la somme h de cette série entière est la fonction définie à l'intérieur de l'intervalle ouvert $]-R, R[$ par la relation :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n \, x^n.$$

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n(x)$.

b. Démontrer que, sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, la fonction h vérifie l'équation différentielle linéaire du premier degré.

$$(1 - 4x) \, h'(x) = 2 \, h(x).$$

c. En déduire l'expression de $h(x)$ sur l'intervalle ouvert $]-R,\ R[$.

2. **Fonctions** M_p :

Soit p un entier strictement positif ($p \geq 1$) ; soit M_p la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-\infty, 1[$ par la relation :

$$M_p(x) = \frac{1}{(1-x)^p}.$$

Déterminer le développement en série entière de la fonction M_p dans un voisinage de 0. Exprimer le coefficient de x^k à l'aide de $C_{p+k-1}^{k}\left(= C_{p+k-1}^{p-1}\right)$

3. **Fonction** f :

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-6\,x+x^2}}.$$

a. Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction f ?

b. Déterminer pour quelles valeurs du réel x la relation suivante

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right).$$

est vérifiée. En déduire que, dans un voisinage de 0, la fonction f est égale à la somme d'une série de fonctions $f_n, n = 0, 1, 2, ...,$ définies par la relation :

$$f_n(x) = \lambda_n\, M_{2n+1}(x)\, x^n.$$

Les λ_n sont des scalaires qui seront déterminés ; il vient par suite :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, M_{2n+1}(x)\, x^n.$$

c. Déduire des résultats précédents l'existence d'un développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Exprimer chaque coefficient a_n à l'aide de la somme d'une série. Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n, n = 0, 1, 2....$

d. Démontrer que la fonction f vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = 0,$$

dans laquelle les deux fonctions a et b sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Les déterminer.

e. En déduire que les coefficients $a_n, n = 0, 1, 2, ...$ du développement en série entière de la fonction f vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation de récurrence (**R**) suivante :

$$(\mathbf{R}) \qquad \forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} - 3\,(2n+1)a_n + n\,a_{n-1} = 0.$$

Déterminer les coefficients $a_0,\ a_1,\ a_2$ et a_3.

4. **Fonction** g :

Le but de cette question est la recherche d'une fonction g qui possède les deux propriétés :

i. les valeurs de $g(0)$ et de $g'(0)$ sont données par les relations suivantes :

$$g(0) = 0,\ g'(0) = 1.$$

ii. le réel $g(x)$ est la somme d'une série entière de terme général $b_n\,x^n,\ n = 0,1,2,$ dont les coefficients $b_n,\ n = 0,1,2,$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$(\mathbf{R}) \qquad \forall n \geq 1,\ (n+1)b_{n+1} - 3\,(2n+1)b_n + n\,b_{n-1} = 0.$$

a. Démontrer que les coefficients $b_n, n = 0,1,2,$ sont bien déterminés ; calculer $b_0,\ b_1,\ b_2$ et b_3.

En supposant le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n\,x^n,\ n = 0,1,2,$ strictement positif, déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction g .

b. Etablir la relation :

$$g(x) = f(x).\int_0^x f(t)\,dt.$$

c. En déduire l'expression de chaque coefficient b_n au moyen des coefficients $a_k,\ k = 0,1,2,..,n$. En déduire une minoration du rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n\,x^n,\ n = 0,1,2,...$

d. Soit n un entier strictement positif ; soit d_n le plus petit commun multiple des n premiers entiers $1,2,...,n$. Démontrer que le réel $d_n.b_n$ est un entier relatif : $(d_n.b_n \in \mathbf{Z})$

5. **Etude des suites** $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **et** $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

Soit $(u_n)_{n=1,2,..}$ la suite des réels définis par la relation suivante : pour tout entier n strictement positif :

$$u_n = b_n\,a_{n-1} - b_{n-1}\,a_n.$$

a. Calculer u_1 et u_2. Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme u_{n+1} en fonction de l'entier n et de u_n. Etudier le signe des réels $u_n,\ n = 1,2,...,$ et la monotonie de cette suite. Déterminer le plus petit des majorants C de cette suite.

b. Démontrer que la suite des nombres réels $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie et strictement croissante ; déterminer, pour tout entier n strictement positif une majoration de la différence

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$$

à l'aide de la constante C et des deux réels a_n et a_{n-1}. En déduire que la suite $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. Soit λ la limite de cette suite :

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}.$$

6. **Détermination de la limite** λ :

Soit ε un réel strictement positif donné. D'après la question précédente, il existe un entier N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, le rapport b_n/a_n est encadré par $\lambda - \varepsilon$ et $\lambda + \varepsilon$:

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \lambda + \varepsilon.$$

a. Démontrer que, lorsque le réel x tend vers $3-\sqrt{8}$ par valeurs inférieures, les deux fonctions f et g croissent vers l'infini.

Soient f_N, g_N, U_N et V_N les fonctions définies par les relations suivantes :

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n,\ g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n x^n,\ U_N(x) = f(x) - f_N(x),\ V_N(x) = g(x) - g_N(x).$$

b. Démontrer, lorsque le réel x est compris entre 0 et $3-\sqrt{8}$ $\left(x \in \left[0,\ 3-\sqrt{8}\right[\right)$, l'encadrement suivant :

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{V_N(x)}{U_N(x)} \leq \lambda + \varepsilon.$$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel N donné, il existe une constante A qui majore les deux fonctions f_N et g_N sur le segment $\left[0,\ 3-\sqrt{8}\ \right]$.

En déduire que la fonction $x \mapsto g(x)/f(x)$ a pour limite λ lorsque le réel x tend vers $3-\sqrt{8}$ par valeurs inférieures.

d. Déterminer le réel λ en admettant la relation ci-dessous :

$$\int_0^{3-\sqrt{8}} \frac{dx}{\sqrt{1 - 6x + x^2}} = \frac{\ln 2}{2}.$$

7. **Un équivalent du réel** a_n **à l'infini** :

Soit α un réel strictement positif donné ; soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des réels définis par la relation suivante :

$$v_n = n^{\alpha}.a_n.$$

a. Démontrer qu'il est possible de choisir le réel α et deux suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$, qui ont chacune, lorsque l'entier n croît vers l'infini, une limite finie, tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation de récurrence suivante

$$v_{n+1} - 6\,v_n + v_{n-1} = \frac{1}{n^2}(A_n.v_n + B_n.v_{n-1}).$$

b. Soit $(w_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ la suite qui vérifie les relations suivantes

$$w_0 = 0,\ w_1 = 3,\ \forall n \geq 1,\ w_{n+1} - 6\,w_n + w_{n-1} = 0.$$

Déterminer les réels w_n ; en déduire un infiniment grand équivalent à w_n à l'infini.

c. En admettant que les deux réels v_n et w_n sont équivalents à l'infini, en déduire un infiniment grand équivalent à a_n lorsque l'entier n croît indéfiniment.

8. **Le réel** $\ln 2$ **n'est pas rationnel** :
Soit u le réel défini par la relation :

$$u = \ln\left(3 + \sqrt{8}\,\right).$$

a. Démontrer l'existence d'un entier N_1 et d'une constante positive K_1, tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_1, il vienne :

$$\frac{1}{2}K_1\frac{e^{n\,u}}{\sqrt{n}} \leq a_n \leq 2\,K_1\frac{e^{n\,u}}{\sqrt{n}}.$$

b. A l'aide de la majoration démontrée à la question 5.d, établir qu'étant donné un réel a strictement compris entre 0 et 2 ($0 < a < 2$), il existe une constante K_2, telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_1, l'encadrement ci-dessous a lieu :

$$0 \leq \lambda - \frac{b_n}{a_n} \leq K_2\,e^{-a\,n\,u}.$$

c. Il est admis que le nombre $N(n)$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier n donné est un infiniment grand équivalent à $\frac{n}{\ln n}$:

$$N(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

En déduire qu'il existe un entier N_2 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_2 ($n \geq N_2$), la relation ci-dessous ait lieu.

$$d_n \leq e^{1,1.n}.$$

d. Soient p_n et q_n les entiers (premiers entre eux) définis par les relations suivantes :

$$p_n = d_n.b_n \quad ; \quad q_n = d_n.a_n.$$

Démontrer l'existence d'un réel r, strictement positif, d'une constante K_3 et d'un entier N_3 tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_3, l'encadrement ci-dessous ait lieu.

$$0 \leq \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{K_3}{(q_n)^{r+1}}.$$

Le résultat ci-dessous est admis :

$$0,61 < \frac{u}{u+1,1} < 0,62.$$

e. Démontrer que, si λ est rationnel, il existe une constante L, strictement positive, ne dépendant que du rationnel λ, pour laquelle l'inégalité ci-dessous est vérifiée.

$$\left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{L}{q_n}.$$

f. En déduire que le réel $\ln 2$ est irrationnel.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries entières
- Équations différentielles linéaires
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs
- Nombres réels et suites numériques
- Suites récurrentes
- Limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp