Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2003, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Première partie
- Seconde partie

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2003/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2003 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet du problème est l'étude de méthodes analytiques (méthodes du gradient, du Lagrangien) pour résoudre l'équation linéaire $A.x = b$ où A est une matrice symétrique positive, inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Dans tout le problème, l'entier n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$) ; la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $e_1,\ e_2, ...,\ e_n$; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ est noté $(x \mid y)$. La norme d'un vecteur x est notée $\|x\|$.

Les matrices considérées sont réelles ; l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n est noté $M_n(\mathbb{R})$. Il est admis que l'application qui, à une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, associe la borne supérieure $N(M)$ des normes des images par M des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ est une norme :

$$N(M) = \sup_{\|x\|=1} \|M.x\| .$$

Une matrice symétrique A est dite positive lorsque, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire des vecteurs $A.x$ et x est positif ou nul $(A.x \mid x) \geq 0$.

Première partie

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu.

Résultats préliminaires :

Soit M une matrice carrée symétrique d'ordre n.

1. Démontrer qu'il existe un plus grand réel p et un plus petit réel q tels que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire $(M.x \mid x)$ vérifie l'encadrement suivant :

$$p \ \|x\|^2 \leq (M.x \mid x) \leq q \ \|x\|^2 .$$

Préciser ces deux réels p et q en fonction des valeurs propres de la matrice M.

2. Montrer que, pour que cette matrice M soit inversible et positive, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient strictement positives.

3. Démontrer que la norme $N(M)$ d'une matrice M symétrique est égale à la plus grande valeur absolue des valeurs propres λ_i $(1 \leq i \leq n)$ de la matrice M :

$$N(M) = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| .$$

Étant donnés la matrice carrée, d'ordre n, symétrique positive A et le vecteur b, soit α un réel strictement positif strictement majoré par $2/\lambda_n$ $(0 < \alpha < 2/\lambda_n)$ où λ_n est la plus grande valeur propre de la matrice A ; soit $\left(x^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ la suite définie par un premier vecteur x^0 choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}^n$ et par la relation de récurrence suivante : pour tout entier naturel k,

$$x^{k+1} = x^k + \alpha \ \left(b - A.x^k\right) .$$

Étude de la suite $\left(x^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$:

4. Démontrer que la suite $\left(x^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite convergente de limite le vecteur z de l'espace $\mathbb{R}^n$, solution de l'équation $A.x = b$.

Soit f la fonction réelle, définie dans $\mathbb{R}^n$, par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}(A.x \mid x) - (b \mid x).$$

Minimum de f :

5. Calcul préparatoire : démontrer que l'expression $f(x+u) - f(x)$ se calcule en fonction des expressions $(A.u \mid u)$, $(A.x \mid u)$ et $(b \mid u)$.

6. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(1 \leq k \leq n)$:

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x).$$

Étant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, soit $g(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, sont égales aux valeurs des dérivées partielles de la fonction f en ce point x :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\ e_k.$$

7. Exprimer ce vecteur $g(x)$ au moyen de la matrice A et des vecteurs x et b.

Étant donnés deux vecteurs x et u de $\mathbb{R}^n$, soit $I(x,u)$ l'expression suivante :

$$I(x,u) = f(x+u) - f(x) - (g(x) \mid u).$$

8. Démontrer que, pour tout vecteur x donné, il existe deux constantes positives ou nulles r et s telles que, pour tout vecteur u, $I(x,u)$ vérifie la relation suivante :

$$r\ \|u\|^2 \leq I(x,u) \leq s\ \|u\|^2.$$

9. Démontrer que, pour que la fonction f admette en z un minimum, il faut et il suffit que le vecteur z vérifie la relation $A.z = b$.

Recherche du minimum de f :

Soit α un réel compris strictement entre 0 et $2/\lambda_n$ $(0 < \alpha < 2/\lambda_n)$.

10. Étant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, déterminer le signe de l'expression suivante

$$f(x - \alpha\ g(x)) - f(x).$$

11. Proposer, à partir de ce résultat, une méthode pour construire une suite de vecteurs $\left(y^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ qui converge vers le vecteur z en lequel la fonction f atteint son minimum ; la justification de la convergence n'est pas demandée.

Seconde partie

Le but de cette partie est de rechercher un vecteur x appartenant à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est supposé être le noyau d'une matrice B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$; ce noyau est supposé différent de tout l'espace $\mathbb{R}^n$ ($\ker B \neq \mathbb{R}^n$).

L'équivalence, établie dans la première partie, entre d'une part résoudre l'équation $A.x = b$ et d'autre part chercher le vecteur z rendant minimum la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par la relation suivante

$$f(x) = \frac{1}{2}(A.x \mid x) - (b \mid x),$$

conduit à se poser le problème suivant :

Soit B une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ dont le noyau F est différent de $\mathbb{R}^n$; rechercher un vecteur $\overline{x}$ appartenant à F rendant minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F.

Existence du minimum de la fonction f dans F :

12. Démontrer que la fonction f possède la propriété suivante : pour tout réel c, il existe un réel ρ, tel que, pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à ρ ($\|x\| \geq \rho$), le réel $f(x)$ est supérieur ou égal à c ($f(x) \geq c$).

13. En déduire que, si y est un point de F, il existe un réel r tel que pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à r ($\|x\| \geq r$), $f(x)$ est supérieur ou égal à $f(y)$.

14. Démontrer à l'aide du résultat précédent qu'il existe au moins un vecteur $\overline{x}$ du sous-espace vectoriel F en lequel la restriction de la fonction f à ce sous-espace F atteint un minimum.

15. Démontrer qu'il existe un seul vecteur $\overline{x}$ en lequel la fonction f atteint son minimum dans F, en admettant que la fonction f est convexe ; c'est-à-dire : pour tout couple $(x,\ y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de vecteurs et tout réel λ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,\ 1[$, les valeurs prises par la fonction f vérifient la relation suivante :

$$f(\lambda\ x + (1-\lambda)\ \ y) \leq \lambda\ f(x) + (1-\lambda)\ \ f(y),$$

où l'inégalité est stricte si et seulement si les vecteurs x et y sont différents.

Propriétés du point $\overline{x}$:

16. Démontrer que, pour qu'un vecteur y de F rende minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F, il faut et il suffit que le vecteur $Ay-b$ soit orthogonal à ce sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.

17. Démontrer que la valeur prise par la fonction f au point $\overline{x}$, en lequel elle atteint son minimum dans F, est donnée par la relation suivante :

$$f(\overline{x}) = -\frac{1}{2}(A\overline{x} \mid \overline{x}) = -\frac{1}{2}(b \mid \overline{x}).$$

Le Lagrangien L :

Soit L la fonction définie sur l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par la relation suivante :

$$L(x,\ y) = f(x) + (y \mid Bx).$$

Un point $(x^*,\ y^*)$ de l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est dit point selle de la fonction L, s'il possède la propriété suivante : quel que soit le point $(x,\ y)$ de l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, les valeurs prises par la fonction L aux points $(x^*,\ y)$, $(x^*,\ y^*)$ et $(x,\ y^*)$ vérifient la double inégalité suivante :

$$L(x^*,\ y) \leq L(x^*,\ y^*) \leq L(x,\ y^*).$$

Propriétés du Lagrangien et de ses points selles :

18. Établir l'inégalité suivante :

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right).$$

Il est supposé dans toute la suite qu'il existe un point selle $(x^*,\ y^*)$ de la fonction L.

19. Démontrer que la valeur prise par la fonction L en un point selle $(x^*,\ y^*)$ vérifie les égalités suivantes :

$$L(x^*,\ y^*) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right).$$

20. Démontrer, pour tout point $(x_1,\ y_1)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall y \quad &\in \quad \mathbb{R}^n, \quad L(x_1,\ y) \leq L(x_1,\ y_1) \Longleftrightarrow Bx_1 = 0. \\ \forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}^n, \quad L(x_1,\ y_1) \leq L(x,\ y_1) \Longleftrightarrow Ax_1 + {}^tBy_1 = b. \end{aligned}$$

21. Soient x_1 un vecteur du sous-espace vectoriel F et y_1 un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le couple $(x_1,\ y_1)$

soit un point selle du Lagrangien L est que le vecteur x_1 réalise le minimum de la restriction de la fonction f à F et que les vecteurs x_1 et y_1 vérifient la relation suivante :

$$Ax_1 + {}^tBy_1 = b.$$

La suite logique est la recherche d'un point selle du Lagrangien L.

Algorithme d'Uzawa : soit toujours $(x^*,\ y^*)$ un point selle, supposé exister ; étant donnés un vecteur y^0 arbitraire de $\mathbb{R}^n$, une suite $(\rho_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de réels, qui seront précisés plus loin, soient $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$ les deux suites de vecteurs définies par les conditions suivantes :

• Pour tout entier naturel m, le vecteur x^m est le vecteur qui rend minimum la fonction $x \longmapsto L(x,\ y^m)$.

• Pour tout entier naturel m, le vecteur y^{m+1} est défini par la relation suivante :

$$y^{m+1} = y^m + \rho_m\ Bx^m.$$

Existence des deux suites $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$:

22. Démontrer que les conditions énoncées permettent de déterminer tous les termes de ces deux suites $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et que les vecteurs de ces suites vérifient, pour tout entier naturel m, les relations suivantes :

$$A(x^m - x^*) + {}^tB(y^m - y^*) = 0,$$

$$y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m\ B(x^m - x^*).$$

où x^* et y^* sont les deux vecteurs d'un point selle de L.

23. En déduire l'égalité ci-dessous :

$$\left\|y^{m+1} - y^*\right\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 - 2\,\rho_m\ (A(x^m - x^*) \mid (x^m - x^*)) + (\rho_m)^2\ \|B(x^m - x^*)\|^2.$$

Convergence de la suite numérique de terme général $\|y^m - y^*\|^2$, $m \in \mathbb{N}$:

24. Un résultat préliminaire : démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique positive inversible, notée $A^{1/2}$, telle que :

$$\left(A^{1/2}\right)^2 = A.$$

Soit C la matrice définie par la relation suivante :

$$C = A^{-1/2}.{}^tB.B.A^{-1/2},$$

où la matrice $A^{-1/2}$ est la matrice inverse de la matrice $A^{1/2}$.

25. Démontrer que la matrice C est une matrice symétrique positive. Établir qu'il existe une constante ν telle que, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité ci-dessous soit vraie :

$$\|Bu\|^2 \leq \nu \ (Au \mid u)\,.$$

Soient α et β deux réels tels que le segment $[\alpha,\ \beta]$ soit contenu dans l'intervalle ouvert $]0,\ 2/\nu[$, $(0 < \alpha < \beta < 2/\nu)$. La suite des réels ρ_m est supposée vérifier pour tout entier naturel m l'inégalité suivante :

$$\alpha \leq \rho_m \leq \beta.$$

26. Démontrer que la suite de terme général $\|y^m - y^*\|^2$, $m \in \mathbb{N}$ est monotone décroissante ; utiliser, pour simplifier, la suite $(u^m)_{m\in\mathbf{N}}$ dont le terme général est définie par la relation suivante :

$$u^m = x^m - x^*.$$

Convergence de la suite $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$:

27. En déduire la convergence et la limite de la suite $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$.

FIN DU PROBLÈME

Prepa Help

prepahelp.com · classes préparatoires, Maroc et France

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Topologie des espaces vectoriels normés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp