Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2005, filière MP

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- I. Calculs préliminaires
- II. Une inégalité intéressante
- III. Extension aux fonctions positives

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2005/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2005 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES. ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE. ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière MP

Durée de l'épreuve : 3 heures
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1 - Filière MP.
Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorsque ce n'est pas explicitement demandé.

Pour une suite de réels $z = (z_n,\, n \geq 1)$, on note $\liminf_n z_n$ (respectivement $\limsup_n z_n$), la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs d'adhérence de z.

On rappelle qu'une suite converge si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence finie.

Pour une suite de fonctions à valeurs réelles $(f_n(x), n \geq 1)$, on note $\liminf_n f_n$ la fonction qui à tout réel x associe $\liminf_n f_n(x)$.

I. Calculs préliminaires

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho} \exp\left((\frac{1}{2} - \rho) x^2 \right). \qquad \text{(A)}$$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \quad = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0.

1) Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

En particulier

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

Montrer que F_f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}\,[$.

2) Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u) e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

3) Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x, calculer

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2,$$

et

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2.$$

5) Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)\,e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

6) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :

$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u\ \geq\ \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}.$$

7) Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}.$$

8) Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right)\ e^{-u^2/2}.$$

9) Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right) e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

II. Une inégalité intéressante

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u,$$
$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

10) Justifier la convergence de ces deux intégrales.

11) Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

12) Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))\right) e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u. \qquad (1)$$

13) Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

14) Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

III. Extension aux fonctions positives

On veut maintenant étendre le résultat de la question 13 aux fonctions qui peuvent s'annuler. On considère donc une fonction continue positive g qui satisfait les mêmes hypothèses que f, à la différence près que g peut s'annuler. Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = x\ln(x)$, on convient que ψ est prolongée par continuité en 0 par $\psi(0) = 0$.

Pour tout entier $n > 0$, on pose

$$f_n(u) = \frac{n-1}{n}\, g(u) + \frac{1}{n}.$$

15) Montrer que $(E(f_n), n \geq 1)$ converge vers $E(g)$ quand n tend vers l'infini.

16) Soit φ_n la fonction associée à f_n, comme φ était associée à f dans la question 2. Pour tout réel x, on note

$$\psi_1(x) = \liminf_n \varphi_n(x) \text{ et } \psi_2(x) = \limsup_n \varphi_n(x).$$

Montrer que pour tout réel x et pour $j = 1$ et $j = 2$:

$$\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u. \qquad (2)$$

17) On note respectivement a et b les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des x tels que $g(x) > 0$:

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) > 0\} \text{ et } b = \sup\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) > 0\}.$$

Lorsque g est strictement positive au voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$), on obtient $a = -\infty$ (respectivement $b = +\infty$) de sorte que

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty \text{ et que } g = 0 \text{ sur }]-\infty, a] \cup [b, +\infty[.$$

Montrer que pour $j = 1$ et $j = 2$, ψ_j est strictement croissante et

$$\lim_{x \to -\infty} \psi_j(x) = a \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \psi_j(x) = b.$$

18) On note D l'ensemble des points de discontinuité de ψ_1. Pour x élément de D, on note

$$\psi_1(x^+) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} \psi_1(y) \text{ et } \psi_1(x^-) = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} \psi_1(y).$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$D_\varepsilon = \{x \in D \,/\, \psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > \varepsilon\}.$$

On fixe N entier non nul, montrer que le cardinal de $D_{1/N}$ est inférieur à $N(b - a)$.

19) Que peut-on dire du cardinal de D ?

20) Montrer que si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ alors g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$.

21) Montrer que si $g(\psi_1(x)) > 0$ alors ψ_1 est continue en x.

22) Montrer que si ψ_1 est continue en x alors $\psi_1(x) = \psi_2(x)$.

23) Notons C l'ensemble des points de continuité de ψ_1 et K une partie compacte de C. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
Montrer qu'il existe dans K des réels $x_0, \cdots, x_{2q+1}$ tels que :
(a) $K \subset \cup_{j=0}^{q} [x_{2j}, x_{2j+1}]$,

(b) pour $j \in \{0, \cdots, q\}$, $x_{2j} < x_{2j+1}$ et $\psi_1(v) - \psi_1(u) \leq \varepsilon$ quels que soient u et v tels que $x_{2j} \leq u \leq v \leq x_{2j+1}$.

24) Déduire des questions 20 à 23 que $(\varphi_n, n \geq 1)$ converge uniformément sur K, vers ψ_1.

25) Montrer qu'il existe A et n assez grands tels que pour tout $m \geq n$, on ait :

$$\sup_{u \in [-A,\, A]} |\varphi_m(u)| \leq |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1.$$

En déduire que

$$\sup\{|u - \varphi_n(u)|^2 \,/\, |u| \leq A,\, n \geq 1\} \text{ est fini.}$$

On note M ce nombre.

26) Montrer que pour tout $A > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-A}^{A} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \int_{-A}^{A} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

Indication : Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $(\lambda_n, n \geq 1)$ la suite des points de discontinuité de ψ_1 dans $[-A, A]$. Pour tout entier p non nul, introduisons

$$J_p =]\lambda_p - 2^{-p}\frac{\varepsilon}{M},\, \lambda_p + 2^{-p}\frac{\varepsilon}{M}[\text{ et } K = [-A, A] \setminus \cup_{p \geq 1} J_p.$$

On majorera séparément les intégrales sur K et sur $\cup_{p \geq 1} J_p$.

27) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Le problème de transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas uni-dimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u - du$ et $u + du$ est donnée par $2\exp(-u^2/2)du$. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique $f(u)\exp(-u^2/2)$. Cela est représenté par une application s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui pour tout réel u donne l'abscisse, $s(u)$, du grain situé en u après le transport. On montre que l'application φ déterminée en question 2 minimise le coût du transport défini par $\int_{-\infty}^{+\infty} |u - s(u)|^2 e^{-u^2/2}\, du$, parmi toutes les fonctions s possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de f et qui ne nécessite pas le calcul de φ. Le nombre $E(f)$ est appelée l'entropie de Boltzmann.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Dérivabilité et convexité
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Suites et séries de fonctions
- Limites et continuité
- Ensembles dénombrables et familles sommables
- Nombres réels et suites numériques

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp