Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2007, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- I. Algèbres de Lie
- II. Algèbres de Lie résolubles

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2007/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2007 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 4 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Algèbres de Lie

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\overline{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\overline{M}$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \cdots, n)$ et pour $k = 0, \cdots, n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k}, i = 1, \cdots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.

De sorte que si i_V représente l'injection de V dans $\mathbb{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout $y \in V$.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X,Y]$, définie par

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X,Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice colonne nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

- 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

- 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X, \quad X_{k+1} = AX_k, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]), \text{ pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

❑ 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j}(M) \, X_j \tag{1}$$

$$[M, A]X_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j+1}(M) \, X_j. \tag{2}$$

❑ 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$.

❑ 5 - Montrer que $\overline{M}_G$, $\overline{A}_G$ et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de G.

❑ 6 - Calculer la trace de $\overline{[M, A]}_G$.

❑ 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$?

❑ 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?

❑ 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_p$ telles que :*

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \cdots \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \tag{A}$$

$$[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \cdots, p-1\}. \tag{B}$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 *$\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.*

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

- 10 - Traduire la propriété « il existe une matrice P inversible telle que pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure » en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

- 11 - Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.

  On pourra considérer les sous-espaces $\mathcal{N}_k$ $(0 \leq k \leq n)$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k $(1 \leq k \leq n)$, $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, $\ldots$, et $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

- 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

- 13 - Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \cdots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \cdots, \overline{M}_r$.

- 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

- 15 - Montrer les relations suivantes :

$$p_H\, u = p_H\, u\, p_H \text{ et } p_H\, v = p_H\, v\, p_H.$$

- 16 - Montrer que $p_H\, u\, p_H$ et $p_H\, v\, p_H$ commutent puis que $p_H\, u_H$ et $p_H\, v_H$ commutent.

❑ 17 - En procédant par récurrence sur n, établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

❑ 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}, M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\overline{A_1} \dots \overline{A_k} X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j.

❑ 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

❑ 20 - Montrer que $\overline{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

❑ 21 - Que peut-on en déduire?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnements qu'aux questions 14 et 17.

Fin du problème

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Structures algébriques usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp