Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2011, filière MP

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : décomposition de Dunford
- Partie B : commutation et conjugaison
- Partie C : formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe
- Partie D : critère de Klarès

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2011/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2011 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2011

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note O_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$. La *trace* d'une matrice U de $M_n(\mathbb{C})$ est notée $\mathrm{tr}(U)$. On dit que deux matrices U et V de $M_n(\mathbb{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice N de $M_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = O_n$.

Dans tout le problème, on considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ on note :

- α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;
- P_i le polynôme défini par $P_i(X) = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$;
- F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\left(\left(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{\alpha_i}\right)$;
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i.

La partie B, à l'exception de la question 11), est indépendante de la partie A.
La partie C est indépendante des parties précédentes.

A. Décomposition de Dunford

1) Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces F_i :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \,.$$

2) En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i. (On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i.)

3) Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

4) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

Les matrices D et N vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de Dunford* de la matrice A. Dans toute la suite du problème, on admettra l'*unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que D et N sont déterminées de façon unique par A.

Un exemple pour $n = 3$:

5) Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

B. Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \qquad \begin{cases} \mathrm{comm}_B(X) = BX - XB \\ \mathrm{conj}_P(X) = PXP^{-1}. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

6) Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Calculer $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$.

Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1.

7) Si A est une matrice diagonale, montrer que pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.

8) En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.

9) Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\mathrm{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

10) Montrer que si A est nilpotente, et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.

D'après la partie A, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\mathrm{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$.

11) Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier > 0 et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$. On note E^* le dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *linéaire par rapport à chacune de ses deux composantes* (et non sesquilinéaire par rapport à la deuxième) et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^{\perp_b} = \big\{x \in E\,;\ \forall\, y \in F,\ b(x, y) = 0\big\}.$$

On suppose que b est *non dégénérée*, c'est-à-dire que $E^{\perp_b} = \{0\}$.

12) Soit u un endomorphisme de E. Démontrer les implications suivantes :
(i) u est diagonalisable $\implies$ (ii) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$ $\implies$ (iii) $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q, et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q)$ une base de F. Pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

13) Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^*.

On complète cette famille libre en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base de E *antéduale* (dont $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ est la base duale).

14) Montrer que $F^{\perp_b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_p)$, et en déduire la valeur de $\dim F + \dim(F^{\perp_b})$.

D. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A) = \operatorname{Ker}\big((\operatorname{comm}_A)^2\big)$.

15) Montrer que l'application φ de $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par la formule $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ pour tous $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

16) Établir l'égalité $\big(\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A)\big)^{\perp_\varphi} = \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$.

17) En déduire que si A est nilpotente, il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \operatorname{comm}_A(X)$. Calculer alors $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question 4).

18) Démontrer qu'il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $N = \operatorname{comm}_A(X)$.

19) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp