Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2013, filière MP

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : formes bilinéaires symétriques plates
- Partie B : diagonalisation simultanée
- Partie C : vecteurs réguliers
- Partie D : le cas p = n de noyau nul

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2013/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2013 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2013

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et p est un entier supérieur ou égal à 1. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs produits scalaires canoniques, notés $\langle\cdot,\cdot\rangle$; en particulier pour $p=1$, c'est le produit usuel dans $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'une application φ de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est *bilinéaire* lorsque pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, les deux applications partielles $z\mapsto\varphi(z,y)$ et $z\mapsto\varphi(x,z)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ sont linéaires. L'application bilinéaire φ est dite *symétrique* si $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, lorsque $p=1$, on dit que φ est une *forme* bilinéaire symétrique.

Soit φ une application bilinéaire symétrique. On appelle *noyau* de φ et on note $\mathrm{Ker}\,\varphi$ l'ensemble des vecteurs $x\in\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $y\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y)=0$. On dit que φ est *diagonalisable* s'il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous $i\neq j$, $\varphi(e_i,e_j)=0$. Enfin, on dit que φ est *plate* (relativement au produit scalaire de $\mathbb{R}^p$) si pour tous les vecteurs x, y, z, w de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle\varphi(x,y),\varphi(z,w)\rangle=\langle\varphi(x,w),\varphi(z,y)\rangle.$$

Le but du problème est d'établir, sous certaines conditions, qu'une application bilinéaire symétrique plate est diagonalisable.

Les parties A, B et C sont indépendantes les unes des autres.

A. Formes bilinéaires symétriques plates

Dans toute cette partie on pose $p=1$. Soit $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

1) Justifier qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y)=\langle u(x),y\rangle$. Vérifier que u est symétrique et en déduire que φ est diagonalisable.

On note $\mathbb{R}^{n*}$ l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ constitué des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Si a et b sont dans $\mathbb{R}^{n*}$, on définit l'application $a\otimes b$ de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, en posant $(a\otimes b)(x,y)=a(x)b(y)$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que pour tous $a,b\in\mathbb{R}^{n*}$, $a\otimes b$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit symétrique.

On rappelle que le *rang* d'une forme bilinéaire symétrique $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est égal au rang de la matrice $\big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$.

3) On suppose dans cette question que φ est de rang 1. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in \mathbb{R}^{n*}$ telle que $\varphi = \pm f \otimes f$. (On pourra considérer la base duale d'une base qui diagonalise φ.)

4) En déduire qu'une forme bilinéaire symétrique de rang 1 est plate.

5) Réciproquement, soit φ une forme bilinéaire symétrique plate non nulle. Quel est le rang de φ ?

B. Diagonalisation simultanée

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E de dimension n, qui commutent deux à deux : $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous i, j dans I. On se propose de démontrer par récurrence sur n qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous ces endomorphismes. Le résultat étant évident pour $n = 1$, on suppose que $n > 1$ et que le résultat est vrai pour toute dimension strictement inférieure à n.

6) Soit $i_0 \in I$. Montrer que si u_{i_0} n'est pas une homothétie, les sous-espaces propres de u_{i_0} sont de dimension strictement inférieure à n. Montrer par ailleurs que ces sous-espaces sont stables par tous les endomorphismes u_i.

7) Conclure.

C. Vecteurs réguliers

Soit φ une application bilinéaire symétrique non nulle de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\tilde{\varphi}(x)$ l'application linéaire qui à tout $y \in \mathbb{R}^n$ associe $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^p$. On a donc $\tilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Le noyau et l'image de $\tilde{\varphi}(x)$ sont notés respectivement $\operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(x)$ et $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$.

On note q la dimension maximale de $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}^n$, et on choisit un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ tel que la dimension de $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(v)$ soit égale à q. Un tel vecteur v est qualifié de *régulier* pour φ.

8) Dans cette question préliminaire, on se donne deux matrices carrées A, B d'ordre n à coefficients réels. Montrer que si A *ou* B est inversible, alors $A + tB$ l'est aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$ *sauf* éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

9) Soit r un entier naturel non nul et $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Montrer que si $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ est libre, alors $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ est également libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

En particulier $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ sera libre pour tout t dans un voisinage de 0.

10) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(v)$, on a $\varphi(x,y) \in \operatorname{Im}\tilde{\varphi}(v)$.

On pourra raisonner par l'absurde en montrant l'existence de vecteurs $e_1,\dots,e_q$ de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille $\big(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q),\varphi(x,y)\big)$ soit libre.

11) Dans cette question, on suppose que φ est *plate*. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(v)$. Si de plus, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, en déduire que $p \geqslant n$.

On revient au cas général où φ est une application bilinéaire symétrique non nulle.

12) Montrer que l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs réguliers pour φ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

13) Montrer que $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

D. Le cas $p = n$ de noyau nul

Dans cette partie, φ désigne une application bilinéaire symétrique plate de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, dont le noyau est réduit à $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. On fixe un vecteur régulier v pour φ.

14) Montrer que $\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit l'endomorphisme $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}$.

15) En utilisant la définition d'une application bilinéaire plate, montrer que $\psi(x)$ est auto-adjoint.

16) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x) \circ \psi(y) = \psi(y) \circ \psi(x)$. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ diagonalisant simultanément tous les endomorphismes $\psi(x)$.

17) Construire à l'aide de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base qui diagonalise φ. On pourra utiliser la symétrie de φ.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Topologie des espaces vectoriels normés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp