Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2013, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : produit scalaire de matrices
- Partie B : décomposition polaire
- Partie C : projeté sur un convexe compact
- Partie D : théorème de Carathéodory et compacité
- Partie E : enveloppe convexe de On(R)
- Partie F : points extrémaux

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2013/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2013 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2013

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations et définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E, on appelle *enveloppe convexe de* H, notée $\mathrm{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On désigne par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A. On rappelle que le *groupe orthogonal* $O_n(\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U\,{}^tU = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. On note $\|\ \|_2$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$: pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X\in\mathbb{R}^n,\,\|X\|=1} \|AX\|.$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i\rangle$.

2) Montrer que l'application $(A,B) \to \mathrm{tr}({}^tA\,B)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\langle\ ,\ \rangle$.

On note $\|\ \|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.*

3) Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B\rangle \geqslant 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E, et on note f^* l'adjoint de f.

4) Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de ${}^tAA$.

5) Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.

6) Montrer que la restriction de h à $\operatorname{Im} h$ induit un automorphisme de $\operatorname{Im} h$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.

7) Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\operatorname{Ker} h$ et $(\operatorname{Im} f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\operatorname{Ker} h$ sur $(\operatorname{Im} f)^\perp$ qui conserve la norme.

8) À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.

9) En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.

On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$$

10) Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

11) Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leqslant 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction $q(t)$ qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de x sur H.

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une *combinaison convexe* des p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

12) Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'*au plus* $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \ldots, x_p \in H$ avec $p \geqslant n+2$.

13) Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$.

14) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15) Si H est une partie compacte de E, montrer que $\text{conv}(H)$ est compacte.
On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Lambda = \left\{(t_1, \ldots, t_{n+1}), \text{ avec } t_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1\right\}.$$

E. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16) Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathscr{B}$ la boule unité fermée de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \| \ \|_2)$.

17) Montrer que $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathscr{B}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathscr{B}$ telle que M n'appartient pas à $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C pour la norme $\| \ \|_1$, et on pose $A = {}^t(M - N)$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question 9).

18) Montrer que pour tout $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\text{tr}(AV) \leqslant \text{tr}(AN) < \text{tr}(AM)$. En déduire que $\text{tr}(S) < \text{tr}(USM)$.

19) Montrer que $\text{tr}(MUS) \leqslant \text{tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1).

20) Conclure : déterminer $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

F. Points extrémaux

Un élément $A \in \mathscr{B}$ est dit *extrémal* dans $\mathscr{B}$ si l'écriture $A = \dfrac{1}{2}(B+C)$, avec B, C appartenant à $\mathscr{B}$, entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{B}$.

21) On suppose que $U \in O_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \dfrac{1}{2}(V+W)$, avec V, W appartenant à $\mathscr{B}$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathscr{B}$.

Soit A appartenant à $\mathscr{B}$ mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$.

22) Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont positifs ou nuls.

23) Montrer que $d_i \leqslant 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et qu'il existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $d_j < 1$.

24) En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à $\mathscr{B}$ telles que $A = \dfrac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Topologie des espaces vectoriels normés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp