Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2014, filière MP

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : préliminaire sur la représentation z exp(z) dans C
- Partie B : représentation A exp(A) d'un bloc de Jordan
- Partie C : forme de Jordan d'une matrice nilpotente
- Partie D : représentation A exp(A) dans Mn(C)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2014/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2014 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel non nul et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Une matrice N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente d'indice p* si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(A)$ ou e^A, la matrice $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\cdot$ On admet que si deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$. Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ, la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1) Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $w = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = w$ équivaut au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) = \alpha - \theta \quad \text{(modulo } 2\pi\text{)}. \end{cases}$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \exp\Big((\alpha - \theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big).$$

2) Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$. Que peut-on en déduire sur les solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé ?

Soit $D = \{Re^{i\theta}\ ;\ R > 0\ et\ 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et g l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

3) Déduire de ce qui précéde que g est surjective.

B. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $\{X, NX, \ldots, N^{n-1}X\}$ est libre.

5) En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

6) Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\widetilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \widetilde{N}e^{\widetilde{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

8) Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^{\mu}$ et montrer que l'on peut écrire :

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$

où p est un polynôme à coefficients complexes qui dépend de μ.

9) Montrer que $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

10) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

11) Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

12) Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes les lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $X_{(i)}$ la $i$ème ligne de X pour $i \in \{1,\dots,p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $J_p(0)$ dans le produit $J_p(0)X$.)

13) Justifier que A' est nilpotente d'indice p. En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

14) En déduire que lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, p_2, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

D. Représentation Ae^A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres complexes distinctes, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ dans le polynôme caractéristique de A. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A et F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\big((f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i}\big)$ pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$.

15) Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces F_i. En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}$$

où $N_1, N_2, \dots, N_s$ sont des matrices nilpotentes.

16) Montrer que l'application $A \mapsto Ae^A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même est surjective.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Nombres complexes et trigonométrie
- Limites et continuité
- Dérivabilité et convexité
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp