Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2014, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : théorème du point fixe
- Partie B : invariance par homotopie
- Partie C : étude de certains opérateurs à noyau
- Partie D : une généralisation
- Partie E : application aux intégrales de Fredholm

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2014/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2014 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2014

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On considère un espace réel E de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme notée $\|\ \|$ et complet pour cette norme. Si A est une partie de E, on note $\overline{A}$ son adhérence, $\mathring{A}$ son intérieur, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ sa frontière, et $d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$ sa distance à un point $x \in E$. On note respectivement $B(x,r) = \{\, y \in E\,;\, \|y-x\| < r\}$ et $\overline{B}(x,r) = \{\, y \in E\,;\, \|y-x\| \leqslant r\}$ les boules ouverte et fermée de centre x et de rayon r.

Étant données deux parties A et B de E, et une application $f : A \to B$, on rappelle que $x \in E$ est un *point fixe* de f si c'est une solution de l'équation $x = f(x)$. L'application f est dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$, c'est-à-dire si pour tous $x, y \in A$, il existe un réel $k < 1$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x-y\|.$$

On rappelle qu'une application lipschitzienne est continue.

Dorénavant et dans tout le problème, A désigne une partie fermée non vide de E.

A. Théorème du point fixe

Dans cette partie préliminaire, on établit le

Théorème (Picard)**.** *Toute application contractante $f : A \to A$ admet un unique point fixe $x \in A$.*

Soit donc $f : A \to A$ une application contractante.

1) Montrer que si f admet un point fixe x, celui-ci est unique.

Soit $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3) Conclure.

B. Invariance par homotopie

Soit $f : A \to E$ et $g : A \to E$ deux applications contractantes. On suppose que f et g sont *homotopes*, c'est-à-dire qu'il existe une application $h : A \times [0,1] \to E$ telle que pour tout $x \in A$, on a $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$, et qui vérifie en outre les trois propriétés suivantes :

$\boxed{a}$ il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in A$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\|h(x,t) - h(y,t)\| \leqslant k\|x - y\| ;$$

$\boxed{b}$ il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout $x \in A$ et tous $t, u \in [0,1]$,

$$\|h(x,t) - h(x,u)\| \leqslant k'|t - u| ;$$

$\boxed{c}$ pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \partial A$, on a $x \neq h(x,t)$.

On suppose en outre que f admet un point fixe dans A et on pose

$$T = \big\{t \in [0,1] \,;\, \exists x \in A,\ x = h(x,t)\big\}.$$

4) Vérifier que T n'est pas vide.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T qui converge vers un réel $t \in [0,1]$. On choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que pour tout entier naturel n, on a la relation $x_n = h(x_n, t_n)$.

5) Vérifier qu'une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tous entiers naturels n et m, on a

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{k'}{1-k}\,|t_n - t_m|.$$

6) Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en déduire que T est fermée.

Soit encore $t \in T$ et $x \in A$ tels que $x = h(x,t)$.

7) Vérifier que $d(x, \partial A) > 0$.

Soit r et ε deux nombres réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leqslant \dfrac{(1-k)r}{k'}$ et $r < d(x,\partial A)$, et soit $u \in [0,1]$ tel que $|t-u| < \varepsilon$.

8) Montrer que pour tout $y \in \overline{B}(x,r) \cap A$, on a $\|x - h(y,u))\| \leqslant r$.

9) En déduire, en utilisant le théorème de Picard ci-dessus, que l'application $y \mapsto h(y,u)$ possède un point fixe intérieur à A.

10) En déduire que T est un ouvert relatif à $[0,1]$. Conclure alors que g possède un unique point fixe intérieur à A (on pourra considérer une borne supérieure de T).

Une application. On ne suppose plus que l'application contractante $f : A \to E$ admet un point fixe, mais on fait les trois hypothèses suivantes :

$\boxed{d}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A ;

$\boxed{e}$ l'image $f(A)$ de A par f est bornée ;

$\boxed{f}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq t f(x)$.

11) Montrer que f possède un unique point fixe intérieur à A.

C. Étude de certains opérateurs à noyau

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et un réel $K_0 > 0$ vérifiant pour tous (t,u) et (t,v) dans $[a,b] \times D$,

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant K_0 |u - v|.$$

L'espace de Banach $C([a,b])$ des fonctions continues $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$.

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application F de $C([a,b])$ dans lui-même par la formule :

$$F(\varphi)(t) = \int_a^b K(t,x) f(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x$$

et on pose $\alpha = \sup\limits_{t\in[a,b]} \displaystyle\int_a^b |K(t,x)|\,\mathrm{d}x$.

12) Pour toutes fonctions $y, z \in C([a,b])$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, on a $y(t) \in D$ et $z(t) \in D$, démontrer l'inégalité

$$\|F(y) - F(z)\| \leqslant \alpha K_0 \|y - z\|.$$

Soit A une partie fermée et bornée de $C([a,b])$ contenant la fonction nulle dans son intérieur et telle que pour tous $\varphi \in A$ et $t \in [a,b]$, on a $\varphi(t) \in D$. On suppose en outre que $\alpha K_0 < 1$ et que pour tous $\varphi \in \partial A$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$.

13) Montrer que F admet un unique point fixe intérieur à A.

D. Une généralisation

Soit C une partie convexe fermée de E contenant A. On considère une application continue $f : A \to C$, *pas nécessairement contractante*, telle que

- $\boxed{g}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A ;
- $\boxed{h}$ l'ensemble $\overline{f(A)}$ est compact ;
- $\boxed{i}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq t f(x)$.

On pose

$$X = \big\{x \in A\,;\, \exists t \in [0,1]\,;\, x = t f(x)\big\}.$$

14) Montrer que X est non vide et fermé. En déduire que la fonction $\mu : A \to [0,1]$ définie par la formule

$$\mu(x) = \frac{d(x, \partial A)}{d(x, \partial A) + d(x, X)}$$

est bien définie et continue. Déterminer $\mu(x)$ lorsque $x \in X$ et lorsque $x \in \partial A$.

On définit une fonction $g : C \to C$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \mu(x) f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C \setminus A. \end{cases}$$

15) Montrer que g est continue sur C et que $\overline{g(C)}$ est compact.

On admet le

Théorème (Schauder)**.** *Si C est une partie convexe fermée de E, toute application $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact possède au moins un point fixe.*

16) Conclure, à l'aide du théorème de Schauder, que f admet un point fixe intérieur à A.

E. Application aux intégrales de Fredholm

On considère dans cette partie l'espace de Banach $E = C([0,1])$ des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues muni de la norme $\|\varphi\|_0 = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t)|$. On note également L^2 l'espace des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues muni de la norme $\|\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

Soit $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose, pour tout $\varphi \in E$ et $t \in [0,1]$:

$$F(\varphi)(t) = h(t) + \int_0^1 K(t,x) g(x, \varphi(x)) \, \mathrm{d}x.$$

On fait les hypothèses suivantes :

- $\boxed{j}$ pour tout réel $r \geqslant 0$, il existe $\mu_r \in L^2$ tel que $|y| \leqslant r$ implique $|g(x,y)| \leqslant \mu_r(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
- $\boxed{k}$ la fonction K_t définie pour tout $t \in [0,1]$ par la formule $K_t(x) = K(t,x)$ est dans L^2, et l'application $t \mapsto K_t$ est continue de $[0,1]$ dans L^2.

On suppose en outre qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et toute solution φ de l'équation $\varphi(t) = \lambda F(\varphi)(t)$, on a $\|\varphi\|_0 \neq M$.

17) Déterminer pour chaque $\varphi \in E$, une constante c_φ telle que pour tous $t, u \in [0,1]$,

$$\begin{cases} |F(\varphi)(t)| \leqslant \|h\|_0 + c_\varphi \cdot \sup_{s\in[0,1]} \|K_s\|_2 \\ |F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| \leqslant |h(t) - h(u)| + c_\varphi \cdot \|K_t - K_u\|_2. \end{cases}$$

18) En déduire que F est une application de E dans E.

On note $A = \overline{B}(0, M)$ et on considère une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.

19) Montrer que si $\varphi_n \to \varphi$ dans E quand $n \to +\infty$, on a la convergence simple $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ sur $[0,1]$.

20) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $t, u \in [0,1]$, $|t-u| < \delta$ implique $|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| < \varepsilon$.

On rappelle que pour tout $\delta > 0$, il existe une famille finie $t_1, t_2, \ldots, t_N \in [0,1]$ telle que le segment $[0,1]$ soit inclus dans la réunion des intervalles $]t_i - \delta, t_i + \delta[$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

21) Montrer que si la suite $(F(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, alors elle converge dans E. En déduire que F est continue sur A.

22) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A. Montrer que la suite $(F(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge simplement sur $[0,1]$ (on pourra commencer par établir la convergence simple sur une partie dense de $[0,1]$).

23) Conclure : F admet un point fixe de norme strictement inférieure à M.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Topologie des espaces vectoriels normés
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Suites et séries de fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp