Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2015, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : norme d'opérateur d'une matrice
- Partie B : variables aléatoires sous-gaussiennes
- Partie C : recouvrements de la sphère
- Partie D : norme d'une matrice aléatoire

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2015/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2015 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiens ».

Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Les parties **A**, **B** *et* **C** *sont mutuellement indépendantes.*

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ et en déduire l'existence de :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{\|Mx\| \ ;\ x \in S^{n-1}\}.$$

2) Montrer que l'application qui à $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer en outre que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité $\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{\mathrm{op}}\, \|x - y\|$.

3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{|\lambda| \ ;\ \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{\mathrm{op}}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{\mathrm{op}} \geqslant \max\{|M_{i,j}| \ ;\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

6) Etablir que :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leqslant 1$ pour tous i, j dans $\{1,\dots,n\}$.

7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{\text{op}} \leqslant n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{\text{op}} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est *α-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathsf{E}\big(\exp(tX)\big) \leqslant \exp\Big(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\Big).$$

On rappelle la notation : $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{\exp(t)+\exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(t) \leqslant \exp\Big(\dfrac{t^2}{2}\Big)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1,1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1,\dots,\mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\Big(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\Big)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\Big).$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant \mathsf{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pout tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leqslant 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a l'*inégalité d'Orlicz* :

$$\boxed{\mathsf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5}.$$

C. Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B_{a,r} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x - a\| \leqslant r\right\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$.

15) Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$$

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

16) Soit Λ un sous-ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x - y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précédente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer que :

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$$

On admet l'existence d'une fonction μ, appelée *volume*, définie sur l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $r > 0$, $\mu\big(B_{a,r}\big) = r^n$.

(ii) Pour toute famille finie $K_1, \dots, K_m$ de compacts de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints, on a :
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mu(K_i).$$

(iii) Pour tous compacts K, K' de $\mathbb{R}^n$, $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leqslant \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x - y\| > \varepsilon$.

17) Vérifier que les boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$. Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\big(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\big)^n$.

18) Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1}, de cardinal majoré par 5^n, et telle que :
$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$$

D. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \dfrac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$, indexées par $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $\big(M_{i,j}^{(n)}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes $y_1, \dots, y_n$ sont des variables aléatoires réelles.

19) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α-sous-gaussienne. En déduire que $\mathsf{E}\big(\exp(\gamma\|y\|^2)\big) \leqslant 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$:
$$P\big(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}\big) \leqslant \big(5\, e^{-\gamma r^2}\big)^n.$$

20) Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question **18)**. Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que $\|M^{(n)}a\| \geqslant r\sqrt{n}$. En déduire que :
$$P\big(\|M^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\big) \leqslant \big(25\, e^{-\gamma r^2}\big)^n.$$

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Topologie des espaces vectoriels normés
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Variables aléatoires discrètes
- Séries entières
- Dérivabilité et convexité
- Séries numériques et vectorielles
- Espaces probabilisés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp