Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2017, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : préliminaires sur les matrices symétriques
- Partie B : autres préliminaires
- Partie C : quelques propriétés de la compacité
- Partie D : théorème du point fixe de Markov-Kakutani
- Partie E : sous-groupes compacts de GLn(R)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2017/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2017 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\varnothing$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, ..., a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, ..., \lambda_p$ dont la somme égale 1, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A à coefficients réels est notée A^T. La trace de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a $X^T S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4. Soit K un sous-ensemble compact de E et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Définir une application ϕ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $\langle x, y\rangle = 0$ implique $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$.

   Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)

   En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

6. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire.)

   Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

C Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

7. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

8. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un en-

semble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

9. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, ...\Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$.

10. Montrer qu'il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, ..., F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \varnothing$.

D Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. Pour tout $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup_{u\in G} \|u(x)\|$.

11. Montrer que N_G est bien définie, et que c'est une norme sur E.

12. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :

    - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
    - pour tous x, y dans E avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

    Pour la deuxième propriété on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $||u(z)||$ est continue.

On considère un élément u de $L(E)$ et on suppose que K est stable par u, c'est-à-dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le nombre réel $\delta(K) = \sup_{x,y\in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

13. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \frac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit r un entier $\geqslant 1$, $u_1, u_2, ..., u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i$.

14. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence d'un élément $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15. Montrer que $N_G\Big(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\Big) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G\Big(u_i(a)\Big)$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a $N_G\Big(u_j(a) + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\Big) = N_G\Big(u_j(a)\Big) + N_G\Big(\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\Big)$.

16. En déduire, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

17. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \ldots, r\}$.

18. En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même par la formule $\rho_A(M) = A^T M A$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.

On note $H = \{\rho_A \mid A \in G\}$, $\Delta = \{A^T A \mid A \in G\}$ et $K = \mathrm{Conv}(\Delta)$.

19. Montrer que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$.

20. Montrer que Δ est un compact contenu dans S_n^{++} et que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

21. Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1} G_1 N = \{N^{-1} B N \ ; \ B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$, et $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $NKN^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P.

22. Montrer que $g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.

Fin du problème

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Topologie des espaces vectoriels normés
- Structures algébriques usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp