Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2017, filière MP

Physique 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : généralités sur les memristors
- Partie II : le memristor des HP Labs
- Partie III : une falaise de potentiel

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2017/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2017 – PHYSIQUE I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

En 1971, le professeur Leon Chua - qui exerça à l'Université de Berkeley - prédit l'existence d'un dipôle passif nouveau capable de servir de mémoire [1], ce dipôle venant complèter la liste des trois dipôles fondamentaux de l'électricité à savoir le résistor, la bobine et le condensateur. Le terme de memristor qu'il inventa résulte de la contraction des deux termes memory et resistor.

En 2008, des chercheurs [2] des HP Labs ont publié un article [3] dans la revue Nature© intitulé *The missing memristor is found*, dans lequel ils annoncent avoir mis au point un memristor présentant les propriétés prévues par Leon Chua en 1971. La photographie de la figure 1 montre un ensemble de ces memristors.

En 2015, HP® et SanDisk® se sont associés pour développer la technologie des mémoires à base de memristors. Les atouts espérés de ce type de mémoires peuvent laisser rêveur : 1 000 fois plus rapides que les mémoires flashs actuelles, 1 000 fois plus de cycles lecture-écriture qu'actuellement et, pour couronner le tout, une densité inégalée au point de pouvoir doter un smartphone d'une mémoire de 100 To en 2020 !

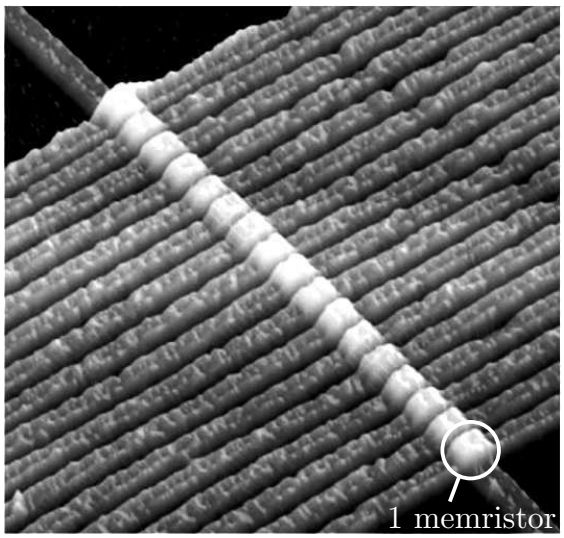


Figure 1 – Un ensemble de memristors (échelle nanométrique) © HP Labs

Le problème proposé comporte 4 parties largement indépendantes qui abordent différents aspects des memristors. L'ensemble des données fournies sont dans le formulaire situé à la fin du sujet.

I. — Généralités sur les memristors

I.A. — Le quatrième dipôle

Les 4 grandeurs fondamentales de l'électricité sont la charge q, le courant i, le flux magnétique ϕ et la tension u. Elles sont en général dépendantes du temps t. On considère les 3 dipôles classiques que sont le résistor de résistance R, la bobine d'inductance L et le condensateur de capacité C. Ces trois dipôles sont considérés comme parfaits. Il est possible de représenter les 4 grandeurs fondamentales de l'électricité au sommet d'un graphe – carré en l'occurrence – où les arêtes représentent des relations fondamentales ou des relations fonctionnelles des dipôles.

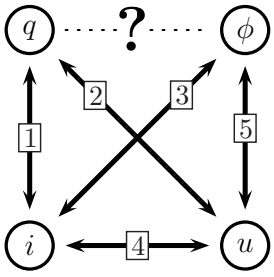


Figure 2 – Le carré fondamental de l'électricité

Ce carré est représenté sur la figure 2. Avant 1971, on connaissait 5 relations entre les sommets de ce graphe et une était manquante. On se placera systématiquement en convention récepteur pour tout dipôle étudié dans la suite du problème.

❏ **1** — Rappeler l'expression de la relation fondamentale liant q, i et t ainsi que les relations fonctionnelles des 3 dipôles parfaits classiques. Ces 4 relations seront exprimées sous la forme différentielle suivante : $\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}z$. à chaque fois, on précisera le sens physique de y et on donnera son unité.

1. IEEE Transactions on circuit theory, vol. CT-18, n◦5, September 1971
2. Dmitri Strukov, Gregory Snider, Duncan Stewart & Stanley Williams
3. Nature, Vol 453— 1 May 2008— doi :10.1038/nature06932

❏ **2** — La relation fondamentale entre le flux ϕ et la tension u s'écrit $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t')\mathrm{d}t'$. Ecrire la cinquième relation dans le graphe de la figure 2 sous forme différentielle.

❏ **3** — Dans son article de 1971, Leon Chua prédit l'existence d'une relation $f(\phi,q) = 0$ que l'on peut soit expliciter sous la forme $\phi = \phi(q)$, on dit que l'on a un memristor contrôlé par la charge ; soit sous la forme $q = q(\phi)$, on dit alors que l'on a un memristor contrôlé par le flux. La sixième relation différentielle est posée sous la forme $\mathrm{d}\phi = M(q)\,\mathrm{d}q$ où $M(q)$ est la memristance. Quelle est l'unité usuelle de la memristance ? Justifier la réponse.

❏ **4** — On associe deux memristors de memristances M_1 et M_2 en série. Quelle est la memristance M du dipôle équivalent ? On justifiera sa réponse. Même question si on associe M_1 et M_2 en parallèle.

Afin de concrétiser la notion de memristor, on propose de le modéliser par la relation $\phi(q) = \alpha\, q + \frac{\beta}{3}\, q^3$ où α et β sont des coefficients réels positifs. On impose dans le memristor une intensité $i(t) = i_0 \sin \omega t$ pour $t \geq 0$ et on suppose que pour $t < 0$, $i = 0$. Enfin, on considère qu'à la date $t = 0$, on a $q(t = 0) = 0$.

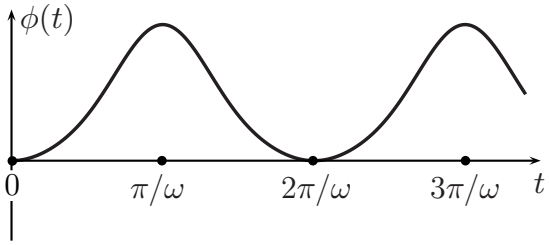


Figure 3 – Graphe de $\phi(t)$

❏ **5** — Déterminer l'expression de $q(t)$ et tracer sur un même graphique les courbes représentatives de $i(t)$ et $q(t)$.

❏ **6** — On donne sur la figure 3 la courbe représentative de $\phi(t)$. Reproduire cette courbe en y rajoutant sans calcul l'allure de la courbe représentative de $u(t)$.

❏ **7** — En analysant la courbe $u(i)$ du memristor précédent représentée sur la figure 4, pourquoi peut-on dire, en simplifiant un peu, que le memristor étudié présente deux régimes de fonctionnement : l'un dans lequel il laisse passer le courant et l'autre dans lequel ce n'est pas le cas.

❏ **8** — La courbe $u(i)$ de la figure 4 présente donc un phénomène particulier. De quoi dépend la résistance du memristor ? Expliquer la possibilité d'utiliser le memristor pour mémoriser une information.

❏ **9** — Leon Chua qualifia le memristor de *non volatile memory*, c'est-à-dire de mémoire permanente. Quel élément sur le graphique de la figure 4 permet de dire que le memristor est une telle mémoire ?

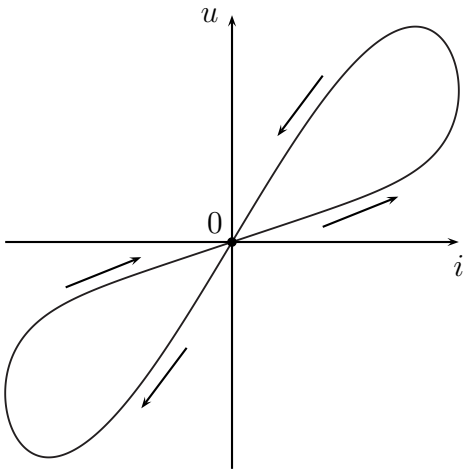


Figure 4 – Courbe $u(i)$ du memristor proposé

I.B. — Conductivité

On considère un milieu conducteur où les porteurs de charge possèdent chacun une charge q et une masse m. Ils sont présents dans le milieu conducteur supposé homogène et isotrope à raison d'une densité volumique n en m^{-3}. Ces porteurs sont soumis à un champ électrique qui va les mettre en mouvement pour créer un courant. Lorsqu'elles se déplacent, ces charges interagissent avec d'autres porteurs en mouvement mais aussi avec leur environnement fixe constitué par le réseau cristallin du conducteur. Elles subissent alors des interactions que l'on peut assimiler à des chocs. Il résulte de l'ensemble des interactions une force de type $-\dfrac{m}{\tau}\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse des porteurs mobiles et τ la durée moyenne qui sépare deux chocs successifs subis par une charge q.

On étudie un conducteur cylindrique de section S, de rayon a et de longueur ℓ constitué du milieu conducteur défini ci-dessus. Ce conducteur est soumis à une différence de potentiel U_0 indépendante du temps qui impose un champ électrique $\vec{E}_0$ uniforme et indépendant du temps.

❏ **10** — Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse des porteurs de charge. Donner la solution $\vec{v}(t)$ sans se préoccuper de déterminer la constante d'intégration. Quelle est l'expression de la vitesse en régime permanent ? Sauf précision contraire, on considère que l'on est en régime permanent. Faire l'hypothèse du régime permanent est-il contraignant ou non ?

❏ **11** — La mobilité μ des porteurs de charge est définie de telle sorte que $\vec{v} = \mu\vec{E}_0$. Donner l'expression de la mobilité d'une charge q. Après avoir rappelé la définition de la densité volumique de courant $\vec{j}_0$, établir l'expression de la conductivité électrique γ_0 du conducteur définie par la loi $\vec{j}_0 = \gamma_0\,\vec{E}_0$. Quel est le nom de la loi précédente ?

❏ **12** — Exprimer la résistance électrique R_0 du cylindre conducteur en fonction de γ_0, ℓ et S.

❏ **13** — Leon Chua indiqua dans son article fondateur que la résistance était un dipôle *memory less*[4] car la tension suivait instantanément les évolutions du courant. Qu'en pensez-vous ?

❏ **14** — On impose maintenant au dipôle non plus le champ électrique $\vec{E}_0$ mais un champ électrique $\vec{E}_1$ toujours uniforme mais dépendant du temps selon $\vec{E}_1 = \vec{E}_{1m}\cos\omega t$. Montrer que le dipôle peut être décrit au moyen d'une impédance complexe $\underline{Z}$ correspondant à l'association de deux dipôles et que la tension ne suit plus instantanément les évolutions de l'intensité. On exprimera $\underline{Z}$ en fonction, entre autres, de R_0. À quelle condition retrouve-t-on la situation où le dipôle est un résistor de résistance R_0 ? Qualifier le comportement du conducteur et l'interpréter.

On revient à la situation où le champ électrique $\vec{E}_0$ imposé est indépendant du temps. On étudie à nouveau la situation du régime permanent.

❏ **15** — Quelle est la puissance transférée à la charge q par le champ électrique $\vec{E}_0$? Quelle est la puissance volumique associée à ce transfert d'énergie ?

❏ **16** — En considérant l'ensemble du conducteur cylindrique, montrer que la puissance qu'il reçoit est $p = u\,i$. Cette expression peut être généralisée aux régimes lentement variables puisque la puissance instantanée $p(t)$ est alors donnée par : $p(t) = u(t)\,i(t)$.

❏ **17** — Dans le cas où le dipôle est un memristor, exprimer la puissance qu'il reçoit en fonction de sa memristance et de l'intensité du courant.

II. — Le memristor des HP Labs

Le memristor mis au point aux HP Labs est constitué par un mince film de dioxyde de titane de 5 nm d'épaisseur et de longueur $\ell = 10$ nm. À chaque extrémité de ce dipôle, le contact électrique est assuré par 2 électrodes de platine. La particularité de ce memristor est que le dioxyde de titane présente dans une zone des lacunes en oxygène, la formule brute du dioxyde de titane étant alors $\mathsf{TiO_{2-x}}$ si x représente les lacunes. On admet que cette situation est équivalente à celle d'un milieu dopé dans lequel les charges mobiles portent deux charges élémentaires positives $q = +2e$. Dans le reste du film, on trouve du dioxyde de titane sans lacune de formule $\mathsf{TiO_2}$. Si le film est totalement dopé, sa résistance électrique est faible et vaut $R_{on} \simeq 1$ kΩ. Au contraire, si le film n'est pas dopé du tout alors sa résistance électrique est élevée : $R_{off} \simeq 100\,R_{on}$. Supposons que la frontière entre la zone dopée et la zone non dopée soit située à l'abscisse z, voir le schéma de la figure 5.

4. sans mémoire

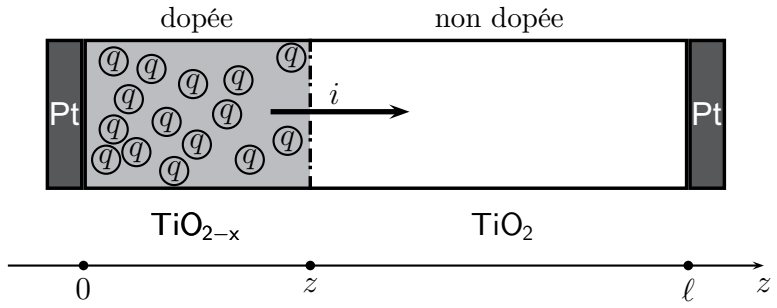


FIGURE 5 – Représentation schématique du memristor des HP Labs

❏ **18** — Donner l'expression de la résistance électrique du memristor lorsque la frontière entre la zone dopée et la zone non dopée se situe à l'abscisse z_0, on notera cette résistance R_{mem0}.

La particularité du film de dioxyde de titane est que la position de la frontière évolue au cours du temps en fonction de l'intensité du courant qui est passée mais aussi en fonction du sens de ce courant. C'est cela qui en fait un memristor. On peut donc passer d'un dispositif bon conducteur à un autre presque isolant. On note dorénavant $z(t)$ la position de la frontière entre la zone dopée et la zone non dopée.

Pour le déplacement de la frontière, on reprend le modèle linéaire de la mobilité étudié à la question **11** où l'on note toujours μ la mobilité des charges mobiles. On propose alors d'écrire la relation

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mu \, \frac{R_{on} i(t)}{\ell}$$

dans laquelle le courant $i(t)$ est algébrique et son sens conventionnel précisé sur la figure 5.

❏ **19** — Quelle lecture faites-vous de la relation précédente ?

❏ **20** — On suppose que $i(t < 0) = 0$, puis que $i(t \geq 0) \neq 0$ et enfin qu'à la date $t = 0$, la frontière est située en $z = z_0$. Établir l'expression de $z(t)$ en fonction, entre autres, de la charge $q(t)$ qui a circulé depuis la date $t = 0$. Quelle est la charge minimale Q_{min} nécessaire, dans le cas le plus défavorable, pour que le memristor soit dans l'état le plus conducteur possible ?

❏ **21** — Établir l'expression de la memristance $M(q)$ en fonction, entre autres, de R_{mem0}. Expliquer pourquoi le memristor a été réalisé pour la première fois avec un système nanométrique.

❏ **22** — Pour simplifier les calculs, on considère que $R_{off} \gg R_{on}$, $z_0 = 0$ et $\phi(t = 0) = 0$. On impose dans le memristor, à partir de la date $t = 0$, un courant d'intensité $i(t) = i_0 \sin \omega t$. Établir les expressions de $q(t)$, $\phi(t)$ et $u(t)$.

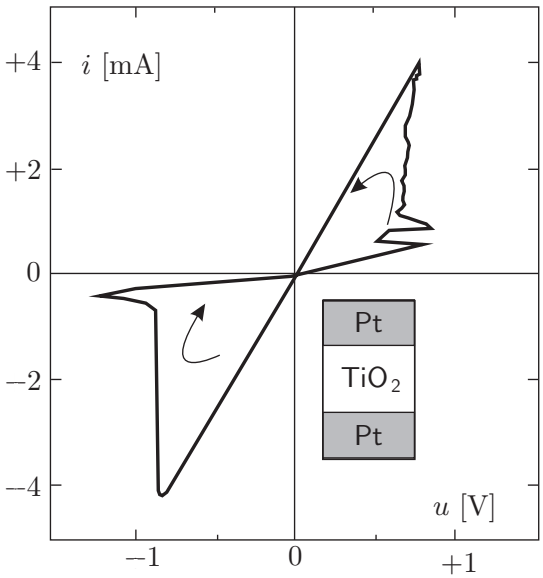


FIGURE 6 – Courbe $u(i)$ du film de TiO_2

❏ **23** — Dans leur article de 2008, les chercheurs [5] des HP Labs ont obtenu expérimentalement la courbe $u(i)$ de la figure 6. Commenter cette courbe.

5. D. Strukov, G. Snider, D. Stewart & S. Williams *The missing memristor is found* Nature Vol 453— 1 May 2008— doi :10.1038/nature06932

III. — Une falaise de potentiel ?

On étudie l'évolution d'un quanton de masse m qui aborde, avec une énergie $E > 0$, une falaise de potentiel de hauteur V_0 constante située en $x = 0$, voir le schéma de la figure 7. L'étude est undimensionnelle conduite sur un axe Ox.

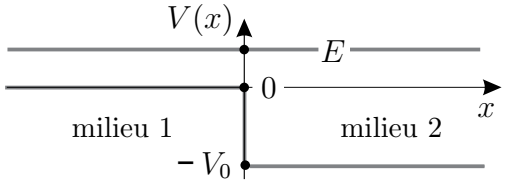


FIGURE 7 – Falaise de potentiel et énergie du quanton

❏ **24** — À partir de l'équation de SCHRÖDINGER, établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ associée au quanton.

❏ **25** — Dans le cas où le quanton arrive depuis $x \to -\infty$, établir les expressions de la fonction d'onde $\varphi_1(x)$ dans le milieu 1 et $\varphi_2(x)$ dans le milieu 2. Il n'est pas nécessaire de déterminer les constantes d'intégration.

❏ **26** — Établir l'expression du coefficient r rapport de l'amplitude de la fonction d'onde spatiale correspondant à l'onde réfléchie et de l'amplitude de l'onde incidente. De la même façon, établir l'expression du coefficient t rapport de l'amplitude de la fonction d'onde spatiale correspondant à l'onde transmise et de l'amplitude de l'onde incidente.

❏ **27** — En déduire les coefficients R et T de réflexion et de transmission de la densité de courant de probabilité. Faire l'application numérique lorsque $8E = V_0$.

Dans le cas du memristor des HP Labs, les charges constituant le courant $i(t)$ traversent le film de dioxyde de titane facilement dans un sens et beaucoup plus difficilement dans l'autre sens. On s'interroge pour savoir si ces charges peuvent être décrites comme le quanton des questions précédentes abordant une falaise de potentiel par un côté ou bien par l'autre pour expliquer la différence de conductivité du memristor en fonction du sens du courant.

❏ **28** — Qu'en pensez-vous ? Que proposeriez-vous ?

Formulaire

Analyse vectorielle en coordonnées polaires

Dans le système des coordonnées cylindro–polaires (r,θ,z) de base associée $(\hat{e}_r,\hat{e}_\theta,\hat{e}_z)$, on rappelle quelques formules d'analyse vectorielle.

Soit f une fonction scalaire telle que $f = f(r,\theta,z,t)$, le gradient de cette fonction est :

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

Soit $\vec{A}$ un vecteur fonction des coordonnées cylindriques, l'expression la plus générale du vecteur est :

$$\vec{A} = A_r(r,\theta,z,t)\hat{e}_r + A_\theta(r,\theta,z,t)\hat{e}_\theta + A_z(r,\theta,z,t)\hat{e}_z$$

La divergence du vecteur $\vec{A}$ est :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le rotationnel du vecteur $\vec{A}$ est :

$$\mathbf{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_z$$

Quelques règles sur les opérateurs :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,f = \vec{0} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\mathbf{rot}\,\vec{A} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{A} = \mathbf{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \vec{\Delta}\vec{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}\,(f\vec{A}) = f\mathbf{rot}\,\vec{A} + \mathbf{grad}\,f \wedge \vec{A}$$

$$\operatorname{div}(f\vec{A}) = f\operatorname{div}\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\mathbf{grad}\right) f$$

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée entourant un volume τ. Le flux d'un vecteur sur la surface S orientée vers l'extérieur est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur tout le volume τ :

$$\text{Théorème de Green - Ostrogradski} \quad \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\tau/S} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée sur laquelle s'appuie une surface Σ. La circulation d'un vecteur le long de $\mathcal{C}$ est égale au flux du rotationnel de ce vecteur à travers Σ orientée selon la règle du tire-bouchon.

$$\text{Théorème de Stokes} \quad \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \mathbf{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma}$$

Mécanique quantique

On note $\hbar = h/2\pi$ avec h la constante de Planck. On rappelle l'équation de Schrödinger pour un quanton de masse m possédant l'énergie E, évoluant en milieu unidimensionnel d'axe Ox dans un potentiel[6] $V(x)$ indépendant du temps. Le quanton est représenté par la fonction d'onde $\psi(x,t)$. On a :

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\,\psi(x,t)$$

Dans le cas d'un potentiel $V(x)$ indépendant du temps, les états stationnaires du quanton sont décrits par la fonction d'onde $\psi_{es}(x,t)$ telle que :

$$\psi_{es}(x,t) = \varphi(x)\,\exp -i\frac{E}{\hbar}t$$

où $\varphi(x)$ est la fonction d'onde spatiale.

On rappelle enfin que la densité de courant de probabilité de présence est définie par :

$$\vec{J} = \pm\frac{\hbar\,k}{m}\,|\varphi(x)|^2\,\hat{e}_x$$

où k est le module du vecteur d'onde associé au quanton.

FIN DE L'ÉPREUVE

6. Attention : en Mécanique quantique, on nomme potentiel $V(x)$ en réalité une énergie potentielle.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Circuits électriques dans l'ARQS
- Conduction électrique et conservation de la charge
- Équations différentielles linéaires du premier ordre

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp