Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2018, filière MP

Physique 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : masses du deuton et du deutérium
- Partie II : étude classique de l'atome de deutérium
- Partie III : le deuton

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2018/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2018 - PHYSIQUE II MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH .**

**Concours Centrale-Supélec (Cycle international),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.**

CONCOURS 2018

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

(Durée de l'épreuve: 3 heures)
L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Et pour un neutron de plus...

Dans l'ensemble du sujet, les vecteurs sont surmontés d'une flèche en général : $\vec{v}$, $\vec{r}$; les vecteurs unitaires sont notés $\hat{u}$, $\hat{e}_x$, ... Pour les notations complexes, on écrira $\jmath^2 = -1$ et on adoptera la notation $\underline{a} = a_0 \exp(-\jmath\omega t)$ ou bien $\underline{a} = a_0 \mathrm{e}^{-\jmath\omega t}$ pour décrire une fonction du temps sinusoïdale, $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$. Un point sur une fonction désigne sa dérivée totale par rapport au temps : $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Les positions dans l'espace seront repérées en coordonnées cartésiennes (x,y,z), rapportées à la base orthonormée $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, ou bien en coordonnées sphériques (r, θ, φ), rapportées à la base orthonormée locale $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Le sujet porte sur l'étude *classique puis quantique* du noyau et de l'atome de **deutérium** (également appelé hydrogène lourd). Le *deutérium* (symbole D ou bien ^{2}H) est un des deux isotopes stables de l'hydrogène. Le noyau du deutérium ^{2}H, connu sous le nom de **deuton**, contient un proton et un neutron, tandis que le noyau de l'isotope le plus répandu de l'hydrogène ne contient qu'un proton, ^{1}H. L'abondance naturelle du deutérium dans les océans de la Terre sous forme d'eau semi-lourde (HDO) ou lourde (D_2O)) est d'environ un atome pour 6 420 atomes d'hydrogène.

Ce problème comporte trois parties **complètement indépendantes** : **I**, **II** et **III** ; pour chacune de ces parties, certaines questions peuvent également être abordées de manière indépendante, à condition d'admettre éventuellement certains résultats affirmés par l'énoncé. La partie **I** est une introduction sur les proportions de masse. La partie **II** décrit, en *mécanique classique* les propriétés générales de l'atome de deutérium, puis de son noyau, le deuton, et leur application à la découverte du Deutérium par Urey en 1931. La partie **III** décrit, en *mécanique quantique*, certaines propriétés générales des interactions à forces centrales, avant de les appliquer à l'étude du noyau du deuton.

Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution du problème sont regroupées dans un tableau à la fin de l'énoncé. Les applications numériques comporteront au mieux deux chiffres significatifs.

I. — Masses du deuton et du deutérium

❏ **1** — Quelle est la proportion en masse du deutérium dans l'hydrogène océanique ?

❏ **2** — Quelle est la proportion en masse du deuton (le noyau) dans le deutérium (l'atome) ?

❏ **3** — Comparer les proportions (en nombres de molécules) de l'*eau lourde* D_2O et de l'*eau semi-lourde* HDO dans les océans. On précisera les hypothèses nécessaires à cette comparaison.

Le premier échantillon d'eau lourde a été isolé par le physicien Gilbert Lewis en 1933 puis une production industrielle par électrolyse a été mise en pratique par l'entreprise norvégienne Norsk Hydro de 1934 à 1943.

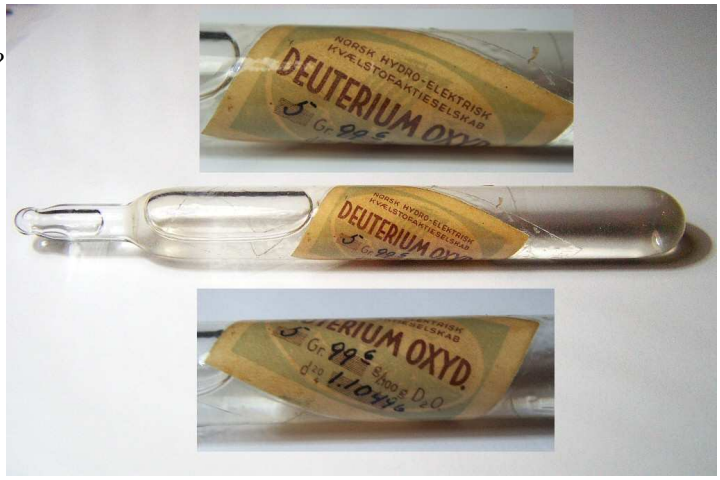


Figure 1 – Échantillon d'eau lourde fabriqué par Norsk Hydro, photographie © Alchemist-hp.

❏ **4** — Citez des applications industrielles de l'eau lourde.

II. — Étude classique de l'atome de deutérium

L'étude classique des propriétés de l'atome de deutérium (formé de son noyau, le deuton, et d'un unique électron) est elle-même divisée en deux sous-parties indépendantes : l'étude des raies d'émission de l'atome de deutérium (**II.A**) et l'influence de l'effet DOPPLER sur leur mesure (**II.B**).

II.A. — Spectroscopie atomique et découverte du deutérium

Un atome d'hydrogène (ou de deutérium) est constitué d'un électron unique, de charge $-e$, de masse m_e, soumis à l'interaction coulombienne d'un noyau supposé *fixe* à l'origine O des coordonnées. Les valeurs E_n de l'énergie de cet électron sont quantifiées et données par la relation

$$E_n = -\frac{E_0}{2n^2} \text{ avec } E_0 = \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \text{ et } n \in \mathbb{N}^\star$$

L'état fondamental est celui d'énergie minimale, il correspond donc à $n = 1$ et sa valeur numérique est $E_1 = -\frac{E_0}{2} = -13{,}6\,\text{eV}$.

❏ **5** — On appelle *série de* BALMER l'ensemble des raies d'émission d'un atome d'hydrogène associées à une transition d'un niveau excité E_n (avec $n > 2$) vers le niveau $n = 2$. Exprimer les longueurs d'onde λ_n associées à ces transitions en fonction de E_0, n, de la constante de PLANCK h et de la célérité de la lumière dans le vide c. Calculer numériquement les longueurs d'onde λ_3 et λ_4 ; quel est le domaine spectral associé ?

On peut établir, et on admettra, que la prise en compte des (faibles) mouvements du *noyau* atomique amène à remplacer, dans toutes les équations ci-dessus, la masse m_e par $m'_e = \frac{m_e}{1 + m_e/M}$ où M est la masse du noyau : $M = m_p$ dans le cas de l'hydrogène « ordinaire » $^1\mathtt{H}$ et $M = m_n + m_p$ dans le cas de l'hydrogène « lourd » (ou deutérium) $^2\mathtt{H}$ ou $\mathtt{D}$.

❏ **6** — Pour une des raies de la série de BALMER, on note λ_n (avec $n > 2$) la longueur d'onde émise par un atome d'hydrogène ordinaire, λ'_n la longueur d'onde émise par un atome de deutérium et $\delta = \frac{\lambda'_n - \lambda_n}{\lambda_n}$ l'écart relatif associé. Montrer que $\delta \simeq -\frac{m_e}{\kappa m_p}$ où κ est une entier que l'on déterminera ; calculer δ ; quelle conséquence en déduisez-vous quant à l'identification spectroscopique du deutérium ?

II.B. — Rôle de la température de l'échantillon

Compte-tenu de la faible proportion des atomes de deutérium dans un échantillon naturel, la détection des raies d'émission (à la longueur d'onde λ') du deutérium, et donc l'identification de celui-ci, nécessite que les raies d'émission « majoritaires » de l'hydrogène (à la longueur d'onde λ) ne *recouvrent pas* les raies du deutérium. En d'autres termes, la *largeur naturelle* $\Delta\omega$ des raies d'émission de l'hydrogène doit vérifier $\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll \delta$ (où l'écart relatif δ a été introduit ci-dessus, question **6**). Pour cette étude, l'atome d'hydrogène, émetteur du rayonnement étudié, sera assimilé à un point matériel de masse $m \simeq m_p$; il sera étudié dans le cadre de la mécanique *classique* (c'est-à-dire ni quantique, ni relativiste).

Cette largeur naturelle des raies d'émission est essentiellement liée à l'agitation thermique de la source d'émission ; on va donc établir le lien liant la pulsation effective d'émission par un atome d'hydrogène, et la pulsation apparente à laquelle l'onde sera observée, en fonction de la vitesse relative de cet atome et du récepteur.

Considérons deux référentiels $(\mathcal{K}) = (Oxyz)$ et $(\mathcal{K}') = (O'x'y'z')$ en mouvement relatif, entièrement caractérisé par la vitesse $\vec{V}_e = \vec{v}_{O'/\mathcal{K}}$ de O' relativement à $(\mathcal{K})$ et par la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ de rotation de $(\mathcal{K}')$ relativement à $(\mathcal{K})$.

❏ **7** — Rappeler l'expression générale de la *loi de composition des vitesses* reliant les vitesses $\vec{v}_{M/\mathcal{K}}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{K}'}$ d'un même point mobile M relativement aux référentiels $(\mathcal{K})$ et $(\mathcal{K}')$.

Le référentiel $(\mathcal{K}) = (Oxyz)$ est celui du laboratoire ; le référentiel $(\mathcal{K}') = (Ex'y'z')$ est attaché à un point E mobile mais les vecteurs directeurs des axes des deux référentiels sont identiques, $\hat{e}'_x = \hat{e}_x$, $\hat{e}'_y = \hat{e}_y$ et $\hat{e}'_z = \hat{e}_z$. Enfin, la vitesse de E relativement à $(\mathcal{K})$ est $\vec{v}_{E/\mathcal{K}} = \vec{V} = V_x\hat{e}_x + V_y\hat{e}_y + V_z\hat{e}_z$, elle est supposé constante.

❏ **8** — Montrer, en application de la loi de composition, que les coordonnées (x,y,z) dans $(\mathcal{K})$ et (x',y',z') dans $(\mathcal{K}')$ d'un même événement vérifient les relations :

$$x' = x - V_x t + x'_0 \qquad y' = y - V_y t + y'_0 \qquad z' = z - V_z t + z'_0$$

où x'_0, y'_0 et z'_0 sont certaines constantes.

Un récepteur de lumière, fixe dans le référentiel $(\mathcal{K})$, et situé à grande distance de l'émetteur E, reçoit une onde électromagnétique émise, dans le vide, dans la direction $\hat{e}_x$. L'émetteur E est un atome d'hydrogène et la grandeur lumineuse associée à cette onde s'écrit $\underline{S}(x',t) = S_0 \exp\left[\jmath\,(kx' - \omega t)\right]$ en notation complexe.

❏ **9** — Quelle relation lie ω et k ?

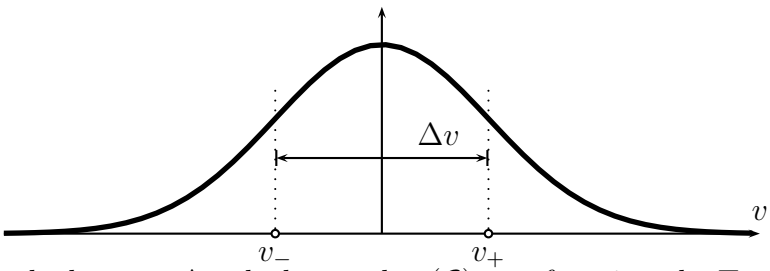
❏ **10** — Déterminer l'expression de l'onde $\underline{S}$, dans le référentiel $(\mathcal{K})$ de sa mesure, en fonction de x et t. En déduire qu'elle est observée à une pulsation apparente ω_{app} que l'on déterminera en fonction de ω, c et de certaines composantes de $\vec{V}$. Cette relation caractérise l'effet Doppler.

L'émetteur E est un atome d'hydrogène au sein d'un échantillon thermostaté à la température T ; en conséquence, sa vitesse varie de manière aléatoire (agitation thermique) avec la loi de distribution de Boltzmann : le nombre d'atomes dont la composante V_x prend une valeur comprise entre v et $v + \mathrm{d}v$ est $\mathrm{d}N = K \exp\left(-\alpha v^2\right) \mathrm{d}v$.

❏ **11** — Exprimer α en fonction de T et de certaines constantes physiques. On ne cherchera pas à calculer K.

❏ **12** — Tracer la courbe représentative $(\mathcal{G})$ de $f(v) = \mathrm{d}N/\mathrm{d}v$ en fonction de v.

Dans le cas d'une courbe gaussienne comme celle tracée ci-dessous, on définit la *largeur* Δv de la courbe comme l'écart $\Delta v = v_+ - v_-$, où v_+ et v_- sont les deux valeurs de v correspondant à des points d'inflexion de la courbe.



❏ **13** — Exprimer la largeur Δv de la courbe $(\mathcal{G})$, en fonction de T, de la constante de Boltzmann k_{B} et de la masse m_p de l'atome d'hydrogène ; commenter.

❏ **14** — En déduire l'allure de la courbe de distribution des pulsations mesurées ω_{app} et calculer sa largeur $\Delta\omega_{\text{app}}$, définie comme ci-dessus.

❏ **15** — En pratique, on impose le critère de détection $\dfrac{\Delta\omega_{\text{app}}}{\omega} \leqslant 5{\cdot}10^{-6}$. Calculer numériquement la température caractéristique à laquelle doit se dérouler l'expérience afin de pouvoir identifier spectroscopiquement le deutérium. Conclure.

III. — Le deuton

III.A. — Potentiels radiaux en physique quantique

L'étude d'un système de deux particules ponctuelles de masses m_1 et m_2, si tuées en A_1 et A_2 et telles que $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}$ est réalisée en utilisant les coordonnées sphériques (r, θ, φ) pour le vecteur $\vec{r}$. Les particules sont en interaction, décrite par l'énergie potentielle $E_p(r)$; la probabilité d'observer une particule dans l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$ entourant le point $\vec{r}$ est donnée par $\mathrm{d}p = |\Psi(\vec{r},t)|^2\mathrm{d}\tau$, où la fonction d'onde $\Psi(\vec{r},t)$ est solution de l'équation de SCHRÖDINGER, $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + E_p(r)\Psi(\vec{r},t) = \jmath\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$ où Δ est l'opérateur de LAPLACE ou laplacien ; le coefficient μ qui remplace, dans cette équation, la masse d'une particule unique, est donné par $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$.
On rappelle aussi l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \Delta_{\text{ang}} f\right] \quad \text{avec} \quad \Delta_{\text{ang}} f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

On cherche une solution de l'équation de SCHRÖDINGER sous la forme $\Psi(\vec{r},t) = \dfrac{R(r)}{r}Y(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{-\jmath\omega t}$.

❏ **16** — Indiquer et justifier brièvement l'expression liant l'énergie E d'un tel état et la pulsation ω.

❏ **17** — Montrer que $R(r)$ et $Y(\theta,\varphi)$ vérifient les deux équations

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \left[E_p(r) + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2}\right]R(r) = ER(r) \quad \text{et} \quad \Delta_{\text{ang}}Y = -CY(\theta,\varphi)$$

où C est une certaine constante.

On rappelle les résultats de la mécanique classique pour l'étude du mouvement d'une particule de masse μ en mouvement dans un champ de forces centrales décrit par l'énergie potentielle $E_p(r)$:

- le mouvement est plan et peut, dans ce plan, être décrit en coordonnées polaires r, θ ;
- le moment cinétique est constant, directement perpendiculaire au plan du mouvement avec pour moment cinétique $\sigma = \mu r^2\dot{\theta}$;
- le mouvement est entièrement décrit par la conservation de l'énergie $E = \dfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$, où l'énergie potentielle effective a pour expression $U_{\text{eff}}(r) = E_p(r) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma^2}{\mu r^2}$.

❏ **18** — Précisez, dans l'équation vérifiée par $R(r)$ établie ci-dessus, les expressions analogues de l'énergie cinétique radiale $\dfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2$, de l'énergie potentielle effective et du moment cinétique σ.

❏ **19** — Quelle serait la valeur de la constante C pour une fonction d'onde purement radiale ? On *ne fera pas nécessairement* cette hypothèse dans les questions qui suivent.

❏ **20** — On procède à une nouvelle séparation des variables en posant $Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. établir les équations différentielles vérifiées par $\Theta(\theta)$ et $\Phi(\varphi)$.

❏ **21** — Justifier le plus précisement possible le fait, qu'à une constante multiplicative près, que l'on peut imposer $\Phi(\varphi) = \mathrm{e}^{\jmath m\varphi}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

❏ **22** — On peut montrer, et on admettra, que les solutions de l'équation différentielle vérifiée par $\Theta(\theta)$ sont des polynômes de degré ℓ (avec $\ell \geqslant |m|$) de la variable $x = \cos\theta$:

$$\Theta(\theta) = a_\ell x^\ell + \ldots + a_1 x + a_0$$

En ne considérant que le terme de plus haut degré, exprimer C en fonction de ℓ seulement. Quel est le moment cinétique σ pour une fonction d'onde caractérisée par ℓ ?

III.B. — Énergie de liaison du deuton

Le deuton est le noyau de l'atome de deutérium $^{2}_{1}\mathtt{H}$, formé d'un neutron et d'un proton. Il s'agit d'un des très rares noyaux stables comportant un nombre impair à la fois de neutrons et de protons (avec $^{6}\mathtt{Li}$, $^{10}\mathtt{B}$, $^{14}\mathtt{N}$ et $^{180}\mathtt{Ta}$) ; en effet, de tels noyaux *impairs–impairs* sont en général peu ou pas stables. L'énergie de liaison du deuton est faible (2,23 MeV seulement) et il n'a qu'un état fondamental, de moment cinétique nul (nombre quantique orbital $\ell = 0$) et pas d'état excité stable.

On considère les états liés stationnaires d'une particule de masse μ dans le puits de potentiel défini par :

$$E_p = -V_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant r \leqslant a \quad \text{et} \quad E_p = 0 \quad \text{pour} \quad r > a$$

avec $V_0 > 0$. On écrit la fonction d'onde indépendante du temps d'un état lié ($-V_0 < E < 0$), à symétrie de révolution (radiale), $\psi(r) = \dfrac{R(r)}{r}$ où $R(r)$ est solution de l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + E_p(r)\,R(r) = E\,R(r)$$

Dont les solutions sont de la forme $R(r) = A\sin(kr)$ pour $r \leqslant a$, et $R(r) = B\mathrm{e}^{-Kr}$ pour $r > a$.

❏ **23** — Justifier ces formes et exprimer k et K en fonction de E et V_0.

❏ **24** — Expliciter les conditions de raccordement en $r = a$.

❏ **25** — On pose $X = ka$ et $Y = Ka$. Écrire deux relations distinctes liant X et Y en fonction de $\rho^2 = \dfrac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}$, indépendamment des valeurs des constantes A et B (qu'on ne cherchera pas à expliciter).

❏ **26** — Représenter graphiquement, sur un système d'axes (X, Y), les deux relations établies à la question précédente.

❏ **27** — Montrer qu'il n'existe d'état lié que si V_0 est supérieur à une certaine valeur $V_{\min}$ que l'on déterminera en fonction de $\hbar$, μ et a.

❏ **28** — Quelle est la valeur maximale $V_{\max}$ de V_0 pour qu'il n'existe qu'un seul état lié ?

On utilise ce modèle pour décrire l'interaction nucléaire entre un neutron et un proton, formant le deuton (noyau de l'atome de deutérium). Le rayon du deuton est $a = 2{,}0 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$; la masse μ est la masse réduite du deuton, $\mu = \dfrac{m_n m_p}{m_n + m_p}$. L'expérience montre qu'il n'existe qu'un seul état lié, d'énergie $E_d < 0$.

❏ **29** — En déduire que, dans ce modèle, $V_{\min} < V_0 < V_{\max}$ et calculer $V_{\min}$ et $V_{\max}$ en MeV.

❏ **30** — Que vaut l'énergie de liaison si $V_0 = V_{\min}$?

❏ **31** — L'énergie de liaison du deuton est $E_d = -2{,}23\,\text{MeV}$. Comparer à $V_{\min}$; en déduire que V_0 est proche de $V_{\min}$.

❏ **32** — En explicitant les relations établies ci-dessus entre X et Y pour V_0 proche de $V_{\min}$, montrer que $V_0 = \dfrac{\hbar^2}{2\mu a^2}\left[\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2a}{\hbar\pi}\sqrt{-2\mu E_d}\right]^2$.

❏ **33** — Calculer V_0 (en MeV) et comparer à E_d.

FIN DE L'ÉPREUVE

Le tableau ci-après récapitule les valeurs de certaines grandeurs physiques ou constantes fondamentales.

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$
Constante de Boltzmann	$k_\text{B} = 1{,}4 \cdot 10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{Hz}^{-1}$
Constante de Dirac	$\hbar = h/2\pi = 1{,}0 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$
Masse du proton	$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \gg m_e$
Masse du neutron	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \simeq m_p$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$
Température d'ébullition de l'azote (sous 1 bar)	$T_\text{eb}^{\text{N}_2} = 77{,}4\,\text{K}$
Température d'ébullition de l'hydrogène (sous 1 bar)	$T_\text{eb}^{\text{H}_2} = 20{,}3\,\text{K}$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Référentiels non galiléens
- Propagation d'un signal
- Fonctions usuelles et lecture des graphes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp