Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2019, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : une propriété de Perron-Frobenius
- Partie B : inégalité de Hilbert
- Partie C : un opérateur intégral
- Partie D : une majoration explicite des rayons spectraux

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2019/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2019 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\| \ \|$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0 \ x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = \left(h_{j,k}^{(n)}\right)_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\widetilde{X}(t)\right)^2 dt$.

On note $\mathscr{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

2) Montrer que $X \in \mathscr{V}$ si et seulement si ${}^tX\, H_n\, X = \rho_n \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0\, H_n\, X_0 \leqslant {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.

4) Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\left|\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tX H_n X \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|\widetilde{X}(e^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que ${}^tX H_n X \leqslant \pi\|X\|^2$.

8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n : E \to E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre. (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)

10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n.

11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \\ J_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t, \\ \Phi_n(x) &= \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\,\Gamma(x) && \text{pour tout } x>0. \\ \Gamma(n) &= (n-1)! && \text{pour tout entier } n>0. \\ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t && \text{pour tous réels } \alpha>0, \beta>0. \end{aligned}$$

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathscr{A}$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t$$

où c est un coefficient à déterminer et où φ' désigne la dérivée de φ. (On pourra traiter à part le cas $n = 0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x) = 0$ et où l'on montrera que $c = \varphi(0)$.)

14) Déduire des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t.$$

15) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0) = 1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ.

17) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,\mathrm{d}t.$$

18) En déduire que pour $n \geqslant 1$,

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[}\ \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[} \theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n \leqslant 2\omega_n \arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$.

20) Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n \arcsin\frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n \to +\infty$.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Nombres complexes et trigonométrie
- Nombres réels et suites numériques
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Équations différentielles linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp