Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2019, filière MP

Physique 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : vérification de la loi de Gladstone-Dale
- Partie II : refroidissement par désaimantation adiabatique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mp/2019/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2019 – PHYSIQUE II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'indice et le froid

Ce sujet comporte deux parties totalement indépendantes. Au sein de chaque partie, de nombreuses questions sont également indépendantes. La première partie concerne la loi de Gladstone-Dale relative à la variation de l'indice de l'air en fonction de la pression et la température. La deuxième partie est consacrée à l'obtention de température extrêmement basse par désaimantation adiabatique.

Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ($\vec{E}$) ou d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\widehat{u}$). Par défaut, la norme d'un vecteur $||\vec{E}||$ est notée simplement E. La mesure algébrique d'un vecteur sur un axe est indicée par le paramètre représentant l'axe, nous notons ainsi $E_z = \vec{E} \cdot \widehat{u_z}$.
Les valeurs des constantes fondamentales nécessaires à la résolution du problème sont regroupées dans une annexe à la fin de l'énoncé. Vous y trouverez également un rappel de quelques fonctions de trigonométrie hyperbolique et du théorème de Schwarz.
Sauf indication contraire, les applications numériques seront des ordres de grandeur qui comporteront toujours deux chiffres significatifs. Le nombre complexe i est tel que $i^2 = -1$.

I. — Vérification de la loi de Gladstone-Dale

Après avoir étudié les propriétés optiques de différents liquides dans le domaine du visible, Gladstone et Dale ont proposé en 1858 une loi empirique relative à l'indice de réfraction, noté n, indiquant que $n-1$ est proportionnel à la masse volumique du liquide. Cette loi a ensuite été étendue au cas du fluide diélectrique homogène et isotrope, comme le sont les gaz et les mélanges de gaz. Cette partie du sujet propose une vérification expérimentale de cette loi pour l'air, et une explication théorique rudimentaire.
Nous notons n_0 l'indice de l'air à la pression p_0 et à la température T_0 ambiantes dans le laboratoire. Nous rappelons que l'indice de réfraction d'un milieu est défini par le rapport de la vitesse c de la lumière dans le vide sur la vitesse de phase v de la lumière dans le milieu considéré, soit $n = \dfrac{c}{v}$, cet indice est généralement plus grand que 1.

❏ **1** — Montrez que, sous réserve d'une approximation usuelle que vous préciserez, la loi de Gladstone-Dale, pour l'air, conduit à écrire que $n-1$ est proportionnel au rapport de la pression sur la température de l'air. En travaillant à température constante, montrez que la variation d'indice $n - n_0$ est proportionnelle à la variation de pression.

Nous posons par la suite $n - n_0 = \dfrac{a}{T_0}\Big(p - p_0\Big)$ où a est une constante qui dépend de la composition de l'air (humidité, taux de $\mathtt{CO}_2$, ...).

❏ **2** — La variation de l'indice de l'air avec la pression est très faible, mais parfaitement mesurable avec un instrument très sensible comme l'interféromètre de Michelson. L'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide, et réglé de façon à observer des anneaux sur un écran. Représentez, sur un schéma symbolique, un interféromètre de Michelson en précisant la position de la source lumineuse et de l'écran. Des lentilles minces dont vous préciserez le rôle sont à utiliser. La lame séparatrice sera représentée par un simple trait. Quelle est la position relative des miroirs ? Nous notons f' la distance focale de la lentille de projection. Déduisez-en la différence de marche δ induite par l'interféromètre dans cette configuration en précisant vos notations. En supposant que le centre de la figure d'interférence est un point brillant d'éclairement maximal, donnez le rayon du $k^{ième}$ anneau brillant en fonction de k, f', λ et δ_0 la différence de marche au centre de la figure. On supposera les angles des rayons lumineux par rapport à l'axe optique de la lentille suffisamment petits pour en négliger l'ordre 3 devant les précédents.

Une cuve est introduite entre un miroir de l'interféromètre et la lame séparatrice. Cette cuve contient de l'air dont on peut faire varier la pression par une simple pompe à main. Un manomètre permet de mesurer la pression relative atteinte. En gonflant lentement, l'air de la cuve reste sensiblement à température ambiante. Une microfuite permet ensuite de ramener très lentement la pression de la cuve à p_0. Dans votre analyse, la cuve sera idéalisée et vous êtes invités à négliger le rôle des parois du dispositif.
Une photodiode est placée à la place de l'écran au centre de la figure d'interférence et permet de décompter le nombre de franges brillantes N qui défilent lentement lors de la diminution de la pression dans la cuve. La longueur de la cuve traversée par les rayons lumineux est $L = 4\,\text{cm}$.

❏ **3** — Reliez la différence de marche supplémentaire due à la présence de la cuve à la variation d'indice $n - n_0$, puis au nombre de franges N, sur la frange centrale éclairant la photodiode. Déduisez-en l'expression de N en fonction notamment de a et de la variation de pression $p - p_0$ dans la cuve.

❏ **4** — Pour $T_0 = 300\,\text{K}$ et $\lambda = 530\,\text{nm}$, le tableau suivant donne le nombre de franges N pour quelques valeurs de surpression $p - p_0$ exprimées en bar :

$p - p_0$	0	0,5	0,7	1	1,3	1,5	1.8	2	2,3	2,5
N	0	17	26	40	56	68	82	92	102	111

Calculez numériquement le coefficient a en détaillant votre démarche. Si vous aviez disposé d'un outil d'analyse numérique (calculatrice, ordinateur + python, etc$\cdots$), comment aurait-on pu exploiter ces données ?

Nous utilisons par la suite la valeur en ordre de grandeur de $a = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{K} \cdot \text{Pa}^{-1}$

La loi empirique de Gladstone-Dale pour l'air peut être expliquée dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. Nous assimilons une molécule d'un gaz composant l'air à un noyau et deux électrons optiquement actifs. Nous notons $\vec{r}(t)$ le vecteur position d'un électron par rapport au noyau, $\vec{v}(t)$ sa vitesse, m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique. L'interaction entre le noyau et l'électron est modélisée par deux forces s'exerçant sur l'électron : une force de rappel élastique $-m_e\omega_0^2\vec{r}$ et une force de frottement fluide $-m_e\Gamma\vec{v}$. L'électron est soumis au champ électrique de l'onde plane que nous considérons localement identique à $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\omega t}$.

❏ **5** — Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de l'électron. Pourquoi n'avons nous pas pris en compte l'effet du champ magnétique de l'onde sur l'électron ? Nous nous intéressons à la solution en régime forcé de cette équation. En utilisant la notation complexe, donnez l'expression de la vitesse $\vec{v}$ d'un électron en fonction du champ électrique.

❏ **6** — Pourquoi ne prenons-nous pas en compte le mouvement des noyaux des molécules induit par le champ électrique de l'onde plane ? Montrez alors que le vecteur densité de courant électronique total peut s'écrire :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e}\frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

où κ est un facteur numérique que l'on déterminera et n^* est le nombre volumique, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume du gaz.

❏ **7** — À quel type de filtre correspond γ ? Soit γ_0 le maximum du module de γ, déterminez l'expression de γ_0. Nous définissons la fonction de transfert $H(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, exprimez cette fonction de transfert et préciser l'expression de son facteur de qualité Q. Représentez le gain de ce filtre dans un diagramme de Bode pour un facteur de qualité de l'ordre de la centaine.

❏ **8** — L'air est assimilé à un milieu neutre électriquement mais polarisable : une onde électromagnétique dans le domaine du visible induit un mouvement des électrons qui se traduit par l'apparition d'un vecteur densité de courant selon la question précédente. Donnez alors les équations de Maxwell dans ce milieu. Montrer qu'en introduisant une permittivité relative ϵ_r complexe que l'on identifiera, on peut écrire l'équation de propagation pour le champ électrique sous la forme $\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.

❏ **9** — On néglige les frottements fluides et on suppose que la pulsation de l'onde ω est très inférieure à ω_0, montrez alors que cette permittivité relative se simplifie en :

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\kappa e^2 n^*}{m_e\epsilon_0\omega_0^2}$$

Quelle est la relation entre la permittivité relative et l'indice n ? En remarquant que $n^2 - 1 \ll 1$, donnez l'expression de l'indice en fonction de n^*, e, m_e, ϵ_0 et ω_0.

❏ **10** — Reliez le nombre volumique n^* à la pression et la température de l'air. Déduisez-en l'expression de l'indice en fonction de la pression, de la température et des autres constantes. Exprimez alors le coefficient a en fonction de e, m_e, ϵ_0, k_B et ω_0. Calculez la valeur numérique de ω_0 et commentez le résultat obtenu.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Refroidissement par désaimantation adiabatique

Le refroidissement par désaimantation magnétique est une technique assez ancienne puisque les premières expériences ont été présentées en 1933, découlant de théorie proposée par Debye (1926) et Giauque (1927). Elle connaît actuellement un regain d'intérêt dans le domaine spatial. L'atténuation du bruit thermique sur les capteurs des satellites nécessite en effet des températures extrêmement basses qui doivent être obtenues dans un milieu en apesanteur et avec un dispositif le plus léger possible. La technique de refroidissement par effet magnétocalorique ne nécessite pas de compresseur, elle est donc compatible avec l'absence de pesanteur. La capacité thermique importante permet de réduire la masse du dispositif. La température de refroidissement attendue est de l'ordre de 50 mK.

L'aimantation, notée $\vec{M}$, est une grandeur intensive définie comme la densité volumique de moment dipolaire magnétique. Il s'agit donc du moment dipolaire magnétique moyen par unité de volume.

Le dispositif de refroidissement comporte un premier étage de refroidissement à adsorption qui amène l'étage de désaimantation magnétique à la température de 350 mK. Le réfrigérant utilisé pour la désaimantation est un sel d'alun de chrome de formule $\mathtt{KCr(SO_4)_2}$ qui est paramagnétique. Les ions présentent un moment magnétique orbital principalement d'origine électronique. En présence d'un champ extérieur, le sel présente une aimantation que l'on cherche à exprimer.

❏ **11** — Considérons une spire de courant circulaire, traversée par l'intensité I, dont la surface est notée S. Son vecteur surface $\vec{S}$ est orienté par $\widehat{u}$ vecteur unitaire normal. Le moment magnétique associé est défini par $\vec{\mu} = I\vec{S}$ avec $\vec{S} = S\widehat{u}$. Plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, le circuit subit une action qui tend à aligner le moment magnétique avec le champ magnétique. Cette action se traduit par un couple de force $\vec{\mu} \wedge \vec{B}$. Montrez qu'il existe deux positions d'équilibre et indiquer leur stabilité. Tracez succinctement le graphe de l'énergie potentielle magnétique $E_m = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ en fonction de l'angle entre les deux vecteurs qui la définissent. Retrouvons-nous les positions d'équilibre et leur stabilité ?

Dans le cadre du modèle semi-classique de Bohr, nous considérons un électron, de masse m et de charge $q = -e$, en orbite circulaire uniforme de rayon r autour d'un noyau. Le moment cinétique de cet électron $\vec{L} = \vec{r}\wedge m_e\vec{v}$ est quantifié, sa norme valant $L = p\hbar$ où $\hbar$ est la constante de Planck réduite et $p \in \mathbb{N}^*$.

❏ **12** — Exprimez la norme du moment cinétique en fonction notamment des normes de $\vec{r}$ et $\vec{v}$. En remarquant que l'électron effectue un tour en une période τ, exprimez l'intensité électrique correspondant à ce circuit élémentaire en fonction de e et des normes de $\vec{r}$ et $\vec{v}$. Déduisez-en l'expression du moment magnétique. Montrez alors que le moment magnétique est colinéaire au moment cinétique. Déduisez-en que sa norme μ est aussi quantifiée $\mu = p\mu_B$ et exprimez la constante μ_B appelée magnéton de Bohr en fonction de e, m_e et $\hbar$. Calculez avec un seul chiffre significatif la valeur numérique de μ_B.

Les sels ioniques d'alun présentent un moment magnétique permanent dont l'orientation est aléatoire. En présence d'un champ magnétique extérieur, ce moment magnétique tend à s'orienter selon le champ. Notons Oz l'axe du champ magnétique, soit $\vec{B} = B\,\widehat{u}_z$. L'énergie potentielle fait intervenir la projection du moment magnétique selon Oz qui est elle-même quantifiée. Ainsi l'état quantique du nuage électronique d'un ion dans un champ magnétique est défini par 4 nombres quantiques (n,ℓ,m,k).

Le nombre k est entier si m est entier ou demi-entier si m est demi-entier. Il peut prendre l'une quelconque des valeurs de l'ensemble $\mathbb{M}$ tel que

$$k \in \mathbb{M} = \left[\begin{array}{l} \{-m,\, -m+1, \cdots,\, -1, 0, 1, \cdots, m-1, m\} \text{ si } m \text{ est entier} \\ \{-m,\, -m+1, \cdots,\, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \cdots, m-1, m\} \text{ si } m \text{ est demi-entier} \end{array} \right.$$

L'énergie potentielle associée à cet état s'écrit $E_k = -kg\mu_B B$ où g est un facteur numérique, appelé facteur de Landé. Contrairement au ferromagnétisme, l'interaction entre les ions est négligeable. Nous considérons n^* ions du sel d'alun par unité de volume dont nous cherchons à exprimer l'aimantation.

❏ **13** — En utilisant la distribution de probabilité de Boltzmann, montrez que la proportion P_k d'ions dans l'état E_k peut s'écrire sous la forme $P_k = \dfrac{\exp(kx)}{Z}$ où la quantité Z permet de normaliser la distribution, et dans laquelle on exprimera x en fonction de g, μ_B, B, k_B et T.

❏ **14** — Exprimez Z en fonction de x et des k. Montrez que Z peut s'écrire comme la somme des premiers termes d'une suite géométrique. Déduisez-en l'expression de Z sous la forme d'un rapport de deux sinus hyperboliques. La fonction Z est appelée fonction de partition.

❏ **15** — La projection du moment magnétique selon l'axe Oz vaut $\mu_z = kg\mu_B$, exprimez sa moyenne $\langle\mu_z\rangle$ dans la distribution dipolaire en fonction de g, μ_B et des proportions P_k, puis en fonction de la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\ln(Z)\Big] = \dfrac{1}{Z}\dfrac{\mathrm{d}\,Z}{\mathrm{d}x}$. Comme les composantes du moment magnétique selon les autres axes sont nulles en moyenne (pas de direction privilégiée), montrez que l'aimantation totale M des n^* ions par unité de volume a pour expression

$$M = M_\infty \left\{ \frac{m+\frac{1}{2}}{\mathrm{th}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]} - \frac{1}{2\,\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)} \right\}$$

où l'on exprimera M_∞ en fonction de n^*, g et μ_B. Ce modèle a été proposé par le physicien français Léon Brillouin en 1927.

❏ **16** — Dans le régime $x \ll 1$, on constate expérimentalement que l'aimantation suit la loi de Curie $M = \gamma\dfrac{B}{T}$ où γ est une constante spécifique du sel d'alun considéré. Exprimez, dans le cadre du modèle obtenu, γ en fonction de n^*, g, μ_B, du facteur $m(m+1)$ et de k_B.

❏ **17** — Nous prenons ici $m = \frac{3}{2}$. On définit la fonction de Brillouin $f(x) = \dfrac{M(x)}{M_\infty}$. Pour quelles raisons physiques fondamentales observe-t-on, d'une part que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, et d'autre part que le graphe de $f(x)$ présente une asymptote horizontale ? Tracer l'allure de $f(x)$ pour $x \geq 0$. Expérimentalement, la susceptibilité magnétique $\chi = \dfrac{\mu_0 M}{B}$ de ce sel d'alun est voisine de $\chi = 1{,}0 \times 10^{-4}$ pour n^* proche du millier de moles par m^3, à la température de 300 K. Retrouvez-vous cet ordre de grandeur avec $g = 2$?

Le sel d'alun utilisé dans la désaimantation suit la loi de Curie $M = \gamma\dfrac{B}{T}$.
Lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, les moments magnétiques tendent à s'aligner selon le champ extérieur. Cet alignement est exothermique. Le sel d'alun est relié au premier étage de refroidissement qui évacue l'énergie thermique produite. Le sel est ensuite isolé thermiquement, et le champ magnétique est lentement diminué. Cette transformation est considérée comme adiabatique réversible.

❏ **18** — L'énergie interne volumique u des n^* ions d'alun par unité de volume est une fonction d'état de ce système. Sa variation est donnée par $\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s + B\mathrm{d}M$ où $s = s(T,B)$ est l'entropie volumique du système. Quelle serait l'équivalent du terme $B\mathrm{d}M$ pour un gaz soumis à des forces de pression ? Le sel est un solide, nous introduisons, à l'aide de l'approche des multiplicateurs de Lagrange, la fonction enthalpie volumique $h = u - BM$. Exprimez la différentielle de h. Dans le cadre du modèle utilisé, h ne dépend que de T, nous définissons c_B la capacité thermique du système par $\mathrm{d}h = c_B\,\mathrm{d}T$. Déterminez la variation $\mathrm{d}s$ de l'entropie en fonction de c_B, γ, B, T et des variations de température $\mathrm{d}T$ et de champ magnétique $\mathrm{d}B$.

❏ **19** — Montrer que $\left(\dfrac{\partial c_B}{\partial B}\right)_T = -\eta\dfrac{\gamma B}{T^2}$ où l'on déterminera la constante η. Dans la gamme de température considérée, la capacité thermique d'un sel paramagnétique non soumis à un champ magnétique extérieur est celle d'un système chaud à deux états, i.e proportionnelle à l'inverse du carré de la température $c_B(T,B=0) = \dfrac{\alpha}{T^2}$ où α est une constante caractéristique du sel considéré. En déduire l'expression de c_B en fonction de γ, α et des variables T et B.

❏ **20** — Le réfrigérant est soumis à un champ magnétique de $B_i = 20\,\text{mT}$ et refroidi à une température $T_i = 350\,\text{mK}$ avant d'être isolé thermiquement. Le champ magnétique est lentement abaissé jusqu'à une valeur résiduelle de $B_f = 2{,}0\,\text{mT}$. Déterminez l'expression de la température finale T_f en fonction de γ, α, B_f, B_i et T_i. Dans les conditions de l'expérience, nous pouvons annuler le paramètre α, déduisez-en l'expression simplifiée de T_f en fonction de B_f, B_i et T_i puis sa valeur numérique.

FIN DE LA PARTIE II

Constantes et valeurs numériques

- Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}4 \times 10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}0 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = k_B N_A = 8{,}3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Constante de Planck : $h = 6{,}6 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$
- Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}1 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1{,}3 \times 10^{-6}\,\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On appelle sinus et cosinus hyperbolique de la variable réelle t, les fonctions :

$$\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

La fonction tangente hyperbolique de la variable réelle t est définie par le rapport $\text{th}(t) = \dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$.

Au voisinage de $t = 0$, le développement de Taylor de la tangente hyperbolique s'écrit :

$$\text{th}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

On rappelle également que $\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\Big(\text{sh}(t)\Big) = \text{ch}(t)$ et $\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\Big(\text{ch}(t)\Big) = \text{sh}(t)$.

Théorème de Schwarz, ou de Young

Soit $f(x,y)$ une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et au moins deux fois dérivable. Elle vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Identité entre opérateurs différentiels

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{u} = \vec{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u} - \Delta\vec{u}$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Interféromètre de Michelson
- Filtrage linéaire
- Notation complexe, régime sinusoïdal forcé et fonctions de transfert
- Magnétostatique : formulation locale

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mp