Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2024, filière MPI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence
- Partie II : une première fonction de seuil
- Partie III : fonction de seuil de la copie d'un graphe

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mpi/2024/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2024 – MATH II MPI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1.
On désigne par $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Le groupe symétrique des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.
Un **graphe** G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe G
- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe G, une arête étant un ensemble $\{s, s'\}$ où s et s' sont des sommets *distincts* de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la FIGURE 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1, 9]\!] \quad \text{et} \quad A = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 9\}, \{2, 8\}\Big\}$$

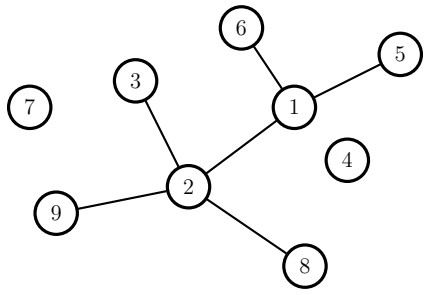


FIGURE 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \Big\{s, s_1, s_2, \ldots, s_d\Big\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$A = \Big\{\Big\{s, s_1\Big\}, \Big\{s, s_2\Big\}, \ldots, \Big\{s, s_d\Big\}\Big\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \Big\{1, 3, 4, 5, 6, 8\Big\}$.

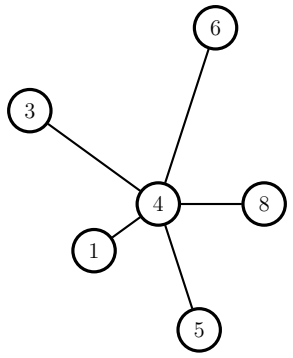


FIGURE 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est **inclus** dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$
- G' est une **copie** de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \qquad \Big\{s', t'\Big\} \in A' \iff \Big\{\sigma(s'), \sigma(t')\Big\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la FIGURE 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.

Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi **indexation**) σ entre $[\![1, n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \Big\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\Big\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i.

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\Big\{i, j\Big\} = \Big\{j, i\Big\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ du graphe G représenté sur la Figure 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1 ▷ Montrer que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 ▷ Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le **polynôme caractéristique du graphe** G.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 ▷ Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

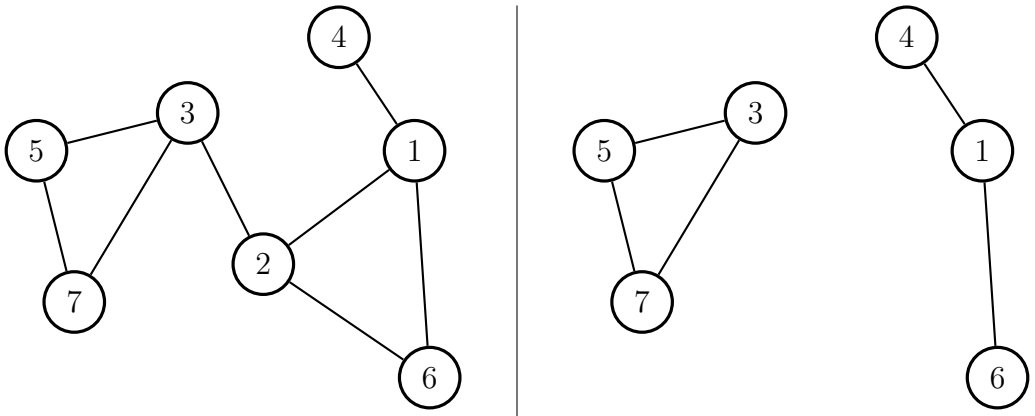
6 ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geq 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

7 ▷ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G \setminus s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S \setminus \{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple FIGURE 3 un graphe G et le graphe $G \setminus 2$:



(a) Un graphe G (b) Le graphe $G \setminus 2$

FIGURE 3 – un graphe G, et le graphe $G \setminus 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \left\{\left\{s_1, s_2\right\}\right\}$.

8 ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$$

9 ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\Big\{0, 1\Big\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Big\{i, j\Big\} \in A \\ 0 & \text{si } \Big\{i, j\Big\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $(X_{\{i,j\}} = 1) = \Big\{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\Big\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\Big\{i, j\Big\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0). \tag{1}$$

On *admet* l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\Big(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n)\Big)$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = \Big(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P}\Big)$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\Big\{i, j\Big\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 ▷ Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\Big\{G\Big\})$ de l'événement élémentaire $\Big\{G\Big\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \text{card}(A)$.

Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une **fonction de seuil** pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0

- si $t_n = \mathrm{o}(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

11 ▷ Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$.

12 ▷ Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\Big(\mathbf{E}(X)\Big)^2}$.

Indication : on remarquera que $(X = 0) \subset \Big(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\Big)$.

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

14 ▷ Montrer que si $p_n = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

15 ▷ Montrer que si $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

16 ▷ En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A).

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geq 2$ et que $a_0 \geq 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: «contenir une copie de G_0».

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

- l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \Big\{H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1, n]\!]\Big\}$$

- pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \qquad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}.$$

17 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}.$$

18 ▷ Soit S_0' un ensemble *fixé* de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 ▷ Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

20 ▷ En déduire que si $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$.

Indication : on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim_{n\to+\infty}\Big(n^{\omega_0}p_n\Big) = +\infty$.

21 ▷ Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}(H\cup H'\subset G) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

Pour $k\in[\![0,s_0]\!]$, on note :

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=k}} \mathbf{P}(H\cup H'\subset G).$$

22 ▷ Montrer que $\Sigma_0 \le \Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2$.

23 ▷ Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k \le \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 ▷ Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1\le q\le r$, on a :

$$\binom{r}{q} r^{-q} \ge \frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q.$$

et en déduire que pour $k\in[\![1,s_0]\!]$, on a $\Sigma_k = \mathrm{o}\Big(\Big(\mathbf{E}(X_n^0\Big)^2\Big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 ▷ Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = 0$ où $\mathbf{V}(X_n^0)$ désigne la variance de X_n^0.

26 ▷ Montrer alors que la suite $(k^{-\omega_0})_{k\ge2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 ▷ Retrouver le résultat de la question 16 ▷ et déterminer une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

Fin du problème

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mpi