Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2024, filière MPI

Physique 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I.A : mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur
- Partie I.B : période du mouvement
- Partie I.C : mesure de l'unité astronomique
- Partie II.A : l'énergie gravitationnelle
- Partie II.B : pression cinétique
- Partie II.C et II.D : confinement quantique et naines blanches

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mpi/2024/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2024 – PHYSIQUE I MPI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Des objets astronomiques, de Mars à Sirius

Ce sujet comporte deux problèmes totalement indépendants étudiant différents aspects de l'astronomie (la science des planètes et des étoiles) et en particulier de l'astrophysique (l'étude des modèles physiques des astres). Le problème **I** décrit des notions connues depuis le XVII^{e} siècle (la mécanique céleste des trajectoires des planètes et les lois de KEPLER et NEWTON). Le problème **II** propose une étude de quelques propriétés énergétiques des étoiles en comparant leur énergie gravitationnelle avec des termes comparables liés aux autres interactions au sein de l'étoile.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des *constantes fondamentales* utiles, des *données numériques* et des rappels de *syntaxe Python* sont regroupés en fin d'énoncé. On pourra noter $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy), cf. figure 1.

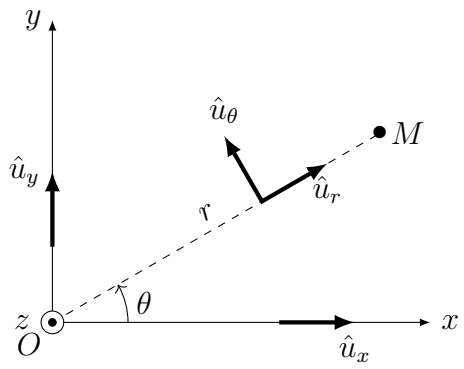


FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

On posera $\mathrm{j}^2 = -1$. On notera par un point les dérivées temporelles, $\dot{f} = \dfrac{df}{dt}$. Les vecteurs $\vec{w}$ sont surmontés d'une flèche, sauf les vecteurs unitaires notés $\hat{u}$.

I Les lois de Kepler et l'unité astronomique

Ce problème est consacré aux lois de KEPLER (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par CASSINI (1672). On notera que ces travaux sont toux deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par NEWTON (1687).

On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

I.A Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen $(\mathcal{R}_0)$, le mouvement d'un astre $\mathscr{P}$ assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur $\mathscr{A}$ de masse m_A et de centre fixe A. On notera $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{r} = r\hat{u}_r$.

❑ – **1**. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?

Quelle est l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{P}$ si les deux astres sont assimilés à des points ?

❑ – **2**. Que devient l'expression de $\vec{F}$ si $\mathscr{P}$ reste ponctuel tandis que l'astre $\mathscr{A}$, de rayon $R_A < r$, possède une répartition de masse à symétrie sphérique ? On justifiera sa réponse.

❑ – **3**. Cette expression reste-t-elle encore applicable si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{A}$ sont tous deux à symétrie sphérique ? *On pourra, dans tout ce qui suit, considérer $\mathscr{A}$ et $\mathscr{P}$ comme des points matériels A et P.*

❑ – **4**. Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy).

On note $\vec{v}$ la vitesse de P et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P. $\vec{v}$ est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ.

❑ – **5**. Exprimer $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}$ et en déduire que $\vec{v}(\theta) = C\dfrac{\hat{u}_\theta + \vec{e}}{p}$ où $\vec{e}$ est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, m_A et de la constante universelle de gravitation $\mathcal{G}$.
Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = e\hat{u}_y$ avec $e = \|\vec{e}\| \geqslant 0$.

❑ – **6**. Exprimer $\dot{r}$ et $r\dot{\theta}$ en fonction de C, p, e et θ.
En déduire r en fonction de p, e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné.
Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T.

I.B Période du mouvement

❑ – **7**. En utilisant par exemple la question précédente, montrer que $T = \mathcal{I}p^{3/2}/\sqrt{\mathcal{G}m_A}$ où la constante $\mathcal{I}$ s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$.

❑ – **8**. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des *lois de Kepler*, préciser laquelle et proposer son énoncé « historique » sous forme d'une phrase en français.

Le calcul de l'intégrale $\mathcal{I}$ en fonction de e peut être mené de manière numérique (au moyen d'un script Python) ; les résultats sont illustrés figure 2.

❑ – **9**. Proposer l'écriture des lignes de code Python permettant le tracé de la figure 2 : courbe en trait plein puis mise en exergue d'une dizaine de valeurs régulièrement réparties pour $0 \leqslant e \leqslant \frac{1}{2}$.

Note : on pourrait mener le calcul exact de l'intégrale qui fournit $\mathcal{I}(e) = (1-e^2)^{-3/2}\mathcal{I}_{e=0}$. Ce calcul n'est pas demandé !

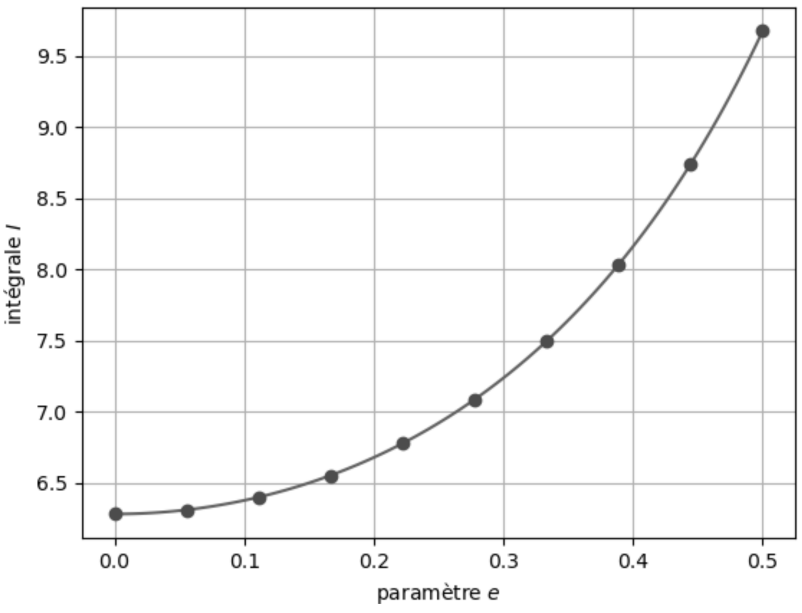


FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale $\mathcal{I}$

I.C Mesure de l'unité astronomique

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de Copernic, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1, de périodes T_0 et T_1.
Le principe de la mesure de a_0 proposée par Cassini, à la fin du XVII^{e} siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7\,070\,\text{km}$) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance *minimale* de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris $\longrightarrow$ Mars et Cayenne $\longrightarrow$ Mars).

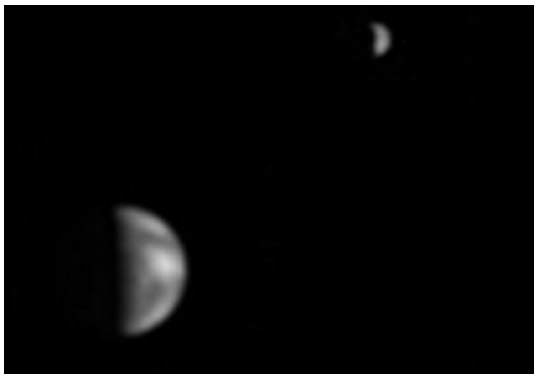


Figure 3 – La Terre et la Lune vues depuis Mars par la sonde *Mars Global Surveyor*, photo NASA

❑ – **10**. Représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0, a_1, ℓ, α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).

❑ – **11**. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0, T_1, ℓ et α.

❑ – **12**. La valeur annoncée par Cassini était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci–dessus ?

II Structure et énergie des étoiles

Les parties **II.A**, **II.B** et **II.C** sont très largement indépendantes. Les étoiles à l'équilibre seront ici décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et de diverses forces antagonistes qui s'opposent à l'effondrement de l'étoile : il s'agira de la pression thermodynamique associée à l'agitation thermique dans la partie **II.B** et d'une propriété strictement quantique, la pression de confinement, dans la partie **II.C**.

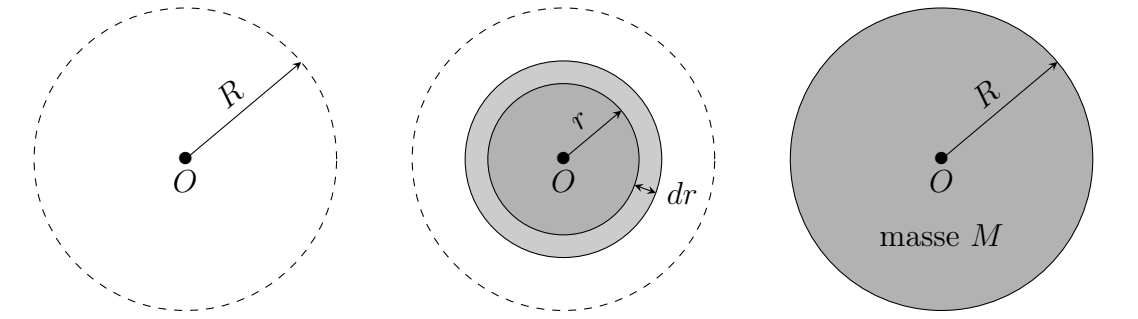


Figure 4 – Constitution progressive de l'étoile

II.A L'énergie gravitationnelle

Du fait de la symétrie sphérique de l'étoile, on va définir son énergie gravitationnelle W_g comme l'énergie mécanique qu'un opérateur *fournit* à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant (figure 4). Ce calcul sera effectué pour une évolution *quasi–statique*, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

❑ – **13**. Donner et justifier physiquement le signe de W_g. Expliquer pourquoi on nomme parfois $E_\ell = -W_g$ l'*énergie de liaison* de l'étoile.

❑ – **14**. Exprimer la masse volumique ρ, supposée uniforme et constante, de l'étoile en fonction de M et R.

En déduire, en fonction de M, R et r, les expressions de m (masse déjà constituée dans une sphère de rayon r) et de dm (masse à apporter pour faire passer ce rayon de r à $r + dr$).

❑ – **15**. Justifier que la contribution dW_g à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement (passage de r à $r + dr$) s'écrit $dW_g = -\mathcal{G}\dfrac{m\,dm}{r}$.

Calculer l'énergie gravitationnelle totale W_g de l'étoile en fonction de $\mathcal{G}$, M et R.

II.B Pression cinétique

Certaines étoiles sont en équilibre sous l'action de la pression cinétique liée à l'agitation thermique qui résiste seule à l'effondrement gravitationnel. On va tout d'abord décrire cet équilibre dans une géométrie cartésienne, l'axe (Oz) étant dirigé selon le champ de gravitation local $\vec{G}(z) = G(z)\hat{u}_z$ (figure 5) avec $G(z) < 0$. On note aussi $\rho(z)$ la masse volumique du fluide au repos et $P(z)$ la pression dans le fluide.

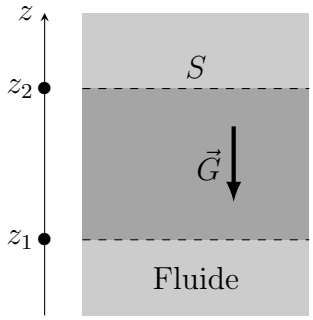


FIGURE 5 – Géométrie du champ de gravitation local

❑ – **16**. On s'intéresse à l'équilibre de la colonne de fluide d'aire S et comprise entre les altitudes z_1 et z_2. Expliciter, éventuellement sous forme intégrale, les forces exercées sur cette colonne. En déduire l'équation différentielle reliant $P(z)$, $\rho(z)$ et $G(z)$.

La pression équilibrant la force gravitationnelle, les ordres de grandeur des énergies thermique et gravitationnelle doivent être comparables ; nous allons ici le vérifier en évaluant l'énergie cinétique de l'étoile dans le cadre d'un modèle très simplifié dans lequel la masse volumique ρ est constante mais qui prend maintenant en compte la géométrie sphérique du système. On suppose ainsi que l'équation d'équilibre local obtenue en géométrie cartésienne à la question **16** se généralise grâce à la symétrie sphérique en faisant $z \to r$ avec $\rho(r) = \text{cste}$.

❑ – **17**. Un volume V de fluide est soumis à la pression P, supposée uniforme. Dans quel modèle l'énergie cinétique d'agitation thermique associée peut-elle s'écrire $E_c = \frac{3}{2}PV$? *Dans la suite de cette partie* ***II.B*** *on supposera que c'est bien le cas en chaque point intérieur à l'étoile.*

❑ – **18**. Expliciter le champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{r})$ ressenti au sein de l'étoile en équilibre à la distance r du centre, en fonction de $\mathcal{G}$, M, R et r.

En déduire l'expression de la pression $P(r) = \dfrac{3\mathcal{G}M^2}{8\pi R^6}(R^2 - r^2)$.

❑ – **19**. Calculer l'énergie cinétique totale de l'étoile E_c en fonction de $\mathcal{G}$, M et R ; commenter.

II.C Pression de confinement quantique

Nous ne ferons plus ici l'hypothèse d'un équilibre de la gravitation par la pression cinétique ; au contraire, nous négligerons tout effet thermique pour les étoiles décrites dans cette partie **II.C**.

L'étoile sphérique étudiée ici, de rayon R, de masse M et de volume V est essentiellement constituée de N atomes d'hydrogène, donc de N protons de masse m_p et d'autant d'électrons de masse $m_e \ll m_p$, chacune de ces particules étant confinée dans un volume $\vartheta = V/N$. On va montrer que le principe d'incertitude impose à chacun des atomes une énergie cinétique dite de confinement quantique. Celle-ci sera évaluée dans un modèle très simplifié, chaque particule restant libre de toute interaction mais confinée dans un volume cubique de côté a tel que $a^3 = \vartheta$.

❑ – **20**. Exprimer a en fonction de M, R et m_p seulement.

On rappelle pour un état stationnaire d'une particule de masse m, libre et à une dimension (Ox), l'équation de SCHRÖDINGER avec $\hbar = h/2\pi$: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$ pour la fonction d'onde $\Psi(x,t) = \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$.

❑ – **21**. La particule étudiée étant confinée à l'intervalle $x \in [0\,,\,a]$, exprimer la fonction d'onde spatiale $\psi_1(x)$ et l'énergie e_1 de l'état fondamental en fonction de h, m et a.
Justifier que cette relation illustre le principe d'indétermination de HEISENBERG.

❑ – **22**. Que deviennent ces expressions de la fonction d'onde et de l'énergie de l'état fondamental dans un modèle confiné à trois dimensions, $x \in [0\,,\,a]$, $y \in [0\,,\,a]$ et $z \in [0\,,\,a]$?

❑ – **23**. En déduire que l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile se met sous la forme $E_c = \gamma M^{5/3}/R^2$ dans laquelle on exprimera γ en fonction de h, m_p et m_e.

II.D Le cas des naines blanches

On s'intéresse ici aux naines blanches, étoiles dans lesquelles la pression due au confinement quantique (avec l'énergie cinétique exprimée en fonction de M et R dans la partie **II.C**) est nettement supérieure aux effets de l'agitation thermique (que l'on négligera donc ici) et compense seule les effets de la gravitation (avec l'énergie de gravitation exprimée également en fonction de M et R dans la partie **II.A**).
La particularité de ces étoiles (essentiellement composées de carbone) et la prise en compte des dégénérescences des états d'énergie des électrons introduisent des facteurs numériques dans l'expression de γ obtenu dans un cas simple à la question **23**. Ces spécificités ne modifient toutefois pas l'expression de l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile. En 1926, FOWLER [1] propose la valeur $\gamma = 1{,}6 \cdot 10^6$ SI pour les naines blanches. On utilisera cette valeur dans le reste du problème.

❑ – **24**. Pour une étoile de ce type, déterminer le rayon R_{eq} qui assure un minimum de l'énergie totale.

❑ – **25**. Calculer numériquement R_{wd} dans le cas d'une masse égale à celle du Soleil et conclure.

En 1931, CHANDRASEKHAR [2] explique qu'il faut prendre en compte le caractère relativiste des électrons confinés dans les naines blanches. Il en deduira un modèle plus correct pour ces étoiles.

❑ – **26**. En estimant la vitesse des électrons dans le modèle de FOWLER justifier l'argument de CHANDRASEKHAR.

FIN DE L'ÉPREUVE

1. R. H. FOWLER, *On dense matter*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **87**, 114, 1926
2. S. CHANDRASEKHAR, *The maximal mass of ideal white dwarfs*, Astrophysical Journal, **74**, 81, 1931

Formulaire en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left[F(r)\right] = \frac{dF}{dr}\hat{u}_r \qquad \text{div}\,\left[F(r)\hat{u}_r\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2F(r)\right]$$

Données numériques

Grandeur	**Symbole, valeur et unité**
Constante de Planck	$h = 6{,}63{\cdot}10^{-34}\,\text{J}{\cdot}\text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\text{m}^3{\cdot}\text{kg}^{-1}{\cdot}\text{s}^{-2}$
Distance Terre–Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1\,\text{UA} = 1{,}50{\cdot}10^{11}\,\text{m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11{\cdot}10^{-31}\,\text{kg}$
Masse du proton	$m_p = 1{,}67{\cdot}10^{-27}\,\text{kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1{,}99{\cdot}10^{30}\,\text{kg}$
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6{,}96{\cdot}10^{8}\,\text{m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6{,}37{\cdot}10^{6}\,\text{m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365\,\text{j} = 3{,}16{\cdot}10^{7}\,\text{s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687\,\text{j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4{,}85\,\mu\text{rad}$

On donne $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \simeq 1{,}6$ et $\left[\frac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \frac{5}{4}$.

Syntaxes Python

Syntaxe d'appel	**Résultats ou commentaires**
⋆ **Générer un tableau de n valeurs régulièrement sur $[a\,,\,b]$:**	
`r = numpy.linspace(a, b, n)`	`r` est un tableau de type `numpy.array`
⋆ **Évalue l'intégrale $y = \int_a^b f(x)dx$ et estime l'erreur numérique**	
`r = scipy.integrate.quad(f, a, b)`	`r = (y, err)`
⋆ **Créer ou activer une fenêtre de tracé :**	
`r = matplotlib.pyplot.figure()`	exécuter *avant* de générer des tracés
⋆ **Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$**	
`matplotlib.pyplot.plot(x, y)`	`x` et `y`, énumérables de même dimension
⋆ **Afficher la ou les fenêtres de tracé :**	
`matplotlib.pyplot.show()`	exécuter *après* avoir généré des tracés

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mpi