Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2025, filière MPI

Physique 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : impulsion de particules élémentaires
- Partie II : le spectre d'émission des atomes d'hydrogène
- Partie III.A : l'interféromètre de Michelson
- Partie III.B et III.C : cohérence spectrale et tubes à hydrogène
- Partie IV : l'équation de Klein-Gordon

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/mpi/2025/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2025 – PHYSIQUE I MPI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Impulsion mécanique et mesures optiques

Le sujet comporte quatre parties **I**, **II**, **III** et **IV** qui, bien que liées les unes aux autres, peuvent être abordées de manière totalement indépendante sous réserve d'admettre éventuellement les résultats affirmés par l'énoncé. Dans les questions posées, *exprimer* signifie donner une expression littérale et *calculer* signifie donner une valeur numérique ; toutes les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les vecteurs seront surmontés d'une flèche, $\vec{p}$ ou $\vec{v}$. Les grandeurs complexes seront soulignées, $\underline{\Psi}$ ou $\underline{z}$, sauf i, tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Dans le langage général, le sens usuel du mot *impulsion* désigne l'élan initial qu'on peut donner à une particule élémentaire ou à un projectile macroscopique qui poursuit ensuite son mouvement. Le même mot a un sens plus spécifique en physique ; l'impulsion, d'abord définie en mécanique *classique* comme la quantité de mouvement dans de très nombreux cas, se retrouve en mécanique *quantique* comme en mécanique *relativiste* avec un sens étendu.

Nous *admettrons* dans tout ce qui suit que l'impulsion $\vec{p}$ d'une particule ponctuelle *libre* (non engagée dans une liaison), de masse m et d'énergie E est, dans le cadre général de la théorie d'Einstein (1905), donnée par la relation dite du *triangle relativiste* :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{1}$$

où $p = \|\vec{p}\|$ et $c = 3{,}0\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ est la célérité de la lumière dans le vide ; par ailleurs, cette même impulsion $\vec{p}$ est, dans la description *ondulatoire* des particules, associée à la longueur d'onde λ de l'onde associée à la particule par la relation de De Broglie (1924) :

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{2}$$

où $h = 6{,}6\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot Hz^{-1}}$ est la constante de Planck (1900).

I Impulsion de particules élémentaires

❑ – **1**. Quel est, à votre avis, la nature du « triangle relativiste » évoqué par la relation (1) ? Représenter celui-ci.

Quelle est l'unité usuelle, dans le système international, de l'impulsion p ? du produit pc ?

L'énergie des systèmes *macroscopiques* s'exprime usuellement en joule (J) ou en kilowatt-heure ($1\,\mathrm{kW\cdot h} = 3{,}6\,\mathrm{MJ}$). Dans toute la suite de la partie **I**, l'énergie des particules *élémentaires* sera donnée en MeV (méga-électron volt) où $1\,\mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV}$ et $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$. Les masses des particules seront données en MeV/c^2 et leurs impulsions en MeV/c. Par exemple la masse de l'électron vaut $m_e = 0{,}51\,\mathrm{MeV}/c^2$ et celle du proton vaut $m_p = 940\,\mathrm{MeV}/c^2$ (ou, si on préfère, $m_ec^2 = 0{,}51\,\mathrm{MeV}$ et $m_pc^2 = 940\,\mathrm{MeV}$).

❑ – **2**. On appelle *énergie de repos* d'une particule la valeur E_0 de l'énergie de celle-ci lorsque son impulsion est nulle. Exprimer E_0 pour un proton et calculer sa valeur numérique.

Pour une particule *en mouvement*, le supplément d'énergie $E_c = E - E_0$ porte le nom d'*énergie cinétique*.

❑ – **3**. On s'intéresse d'abord aux particules vérifiant la relation (1) dans le cas de la *limite classique*, lorsque $E_c \ll E_0$. En vous limitant au premier ordre non nul, donner dans ce cas une expression de E_c en fonction de l'impulsion p et de la masse m de la particule. Quelle est alors la relation entre l'impulsion $\vec{p}$ et la vitesse $\vec{v}$ d'une particule ?

Quelle vitesse maximale peut-on donner à un proton pour rester dans la limite classique telle que $E_c/E_0 < 1\%$? Même question pour un électron.

Si on ne se limite pas aux faibles vitesses, on peut montrer, et on l'admettra, la relation générale entre la masse m, la vitesse $\vec{v}$ de norme $v = \|\vec{v}\|$, l'impulsion $\vec{p}$ de la particule et la célérité c de la lumière :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3}$$

❑ – **4**. En déduire l'expression générale de l'énergie totale $E = f(E_0, v, c)$ d'une particule de masse m.

❑ – **5**. Un photon est une particule associée à une onde électromagnétique dans le vide et dont la vitesse est donc égale à c. Que peut-on en déduire, pour sa masse, de la relation $E = f(E_0, v, c)$ établie à la question précédente ?

Déduire de (2) l'expression de l'énergie E d'un photon en fonction de la longueur d'onde λ puis de la fréquence ν de l'onde. Faire l'application numérique dans les cas des ondes lumineuses des domaines bleu ($\lambda \sim 400\,\text{nm}$) puis rouge ($\lambda \sim 600\,\text{nm}$). On pourra exploiter le fait que $hc \simeq 1{,}2\,\text{eV}\times\mu\text{m}$ et on exprimera E en eV.

II Le spectre d'émission des atomes d'hydrogène

On s'intéresse ici à l'émission d'un photon, d'énergie E et d'impulsion $p = E/c$, par un atome initialement au repos, de masse m. Au cours de cette émission, l'atome passe de l'énergie initiale E_i à l'énergie finale $E_f = E_i - \Delta E < E_i$ et il recule avec, dans le cadre d'une description classique, l'impulsion $m\vec{v}$ et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ (figure 1) de sorte que l'impulsion *totale* du système complet reste nulle après l'émission, comme elle l'était avant émission. La direction de l'impulsion $\vec{p}$ du photon est donc opposée à la vitesse $\vec{v}$ de l'atome qui recule.

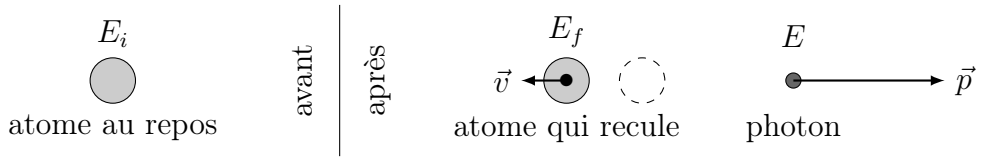


FIGURE 1 – Émission d'un photon par un atome au repos

❑ – **6**. On admet que l'énergie totale du système après émission est identique à celle de l'atome au repos avant l'émission. En déduire la relation $E = mc^2\left(\sqrt{1+2\eta} - 1\right)$ et exprimer η en fonction de ΔE, m et c.

❑ – **7**. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, ΔE est de l'ordre de quelques électrons–volts. En déduire qu'on peut négliger l'énergie de recul de l'atome et conclure quant à la relation entre $\Delta E = E_i - E_f$ et l'énergie E du photon émis.

La résolution de l'équation de SCHRÖDINGER (1922) dans le cas de l'atome d'hydrogène montre que les valeurs de l'énergie E_n de l'atome sont quantifiées en fonction du nombre quantique principal $n \in \mathbb{N}^*$ et de la grandeur $H = 27{,}2\,\text{eV}$ selon la relation : $E_n = -H/(2n^2)$. Cette expression est confirmée par l'étude des ondes lumineuses, de longueur d'onde λ, émises par un ensemble d'atomes d'hydrogène qui rayonnent par désexcitation depuis un état initial quantifié par n_i vers l'état final quantifié par $n_f < n_i$.

❑ – **8**. Lorsque l'état final est $n_f = 1$, montrer qu'il existe une $\lambda_{\max}$ telle que $\lambda \leqslant \lambda_{\max}$ et donner une estimation de $\lambda_{\max}$. Quel est le domaine spectral correspondant à ces raies d'émission ?

Lorsque l'état final est $n_f > 2$, montrer qu'il existe une $\lambda_{\min}$ que l'on estimera, telle que $\lambda \geqslant \lambda_{\min}$. Quel est le domaine spectral correspondant à ces raies d'émission ?

Les raies d'émission de l'hydrogène dans le domaine visible (les raies de BALMER) ont été étudiées à partir de 1853 par ÅNGSTRØM ; à quelles valeurs de n_f correspondent-elles ?

C'est la connaissance précise de ce spectre qui a permis l'étude de la quantification de l'énergie des atomes donc l'introduction de la mécanique quantique au début de XX^{e} siècle. Cette connaissance a été par la suite améliorée au moyen de la spectrométrie interférentielle.

III Mesures interférométriques de longueurs d'onde

En 1907, MICHELSON est le premier américain à recevoir le prix Nobel de physique pour *ses instruments optiques de précision et les mesures spectroscopiques et métrologiques réalisées au moyen de ceux-ci.* En particulier, il publiera en 1892 des mesures relatives aux spectres d'émission de plusieurs sources, obtenues par spectroscopie interférentielle, et notamment pour les raies H_α (rouge) et H_β (bleue) d'émission par les atomes d'hydrogène.

III.A L'interféromètre de Michelson

Le schéma du montage utilisé par MICHELSON est proposé figure 2. Le dispositif monochromateur, formé d'un prisme de verre dispersif et d'une fente étroite, éclaire l'appareil en sélectionnant une raie quasi-monochromatique de longueur d'onde λ_0, appartenant au domaine visible. L'observation est réalisée au moyen d'un oculaire afocal, réglé à l'infini : il donne d'un objet situé à grande distance une image également à grande distance, mais agrandie.

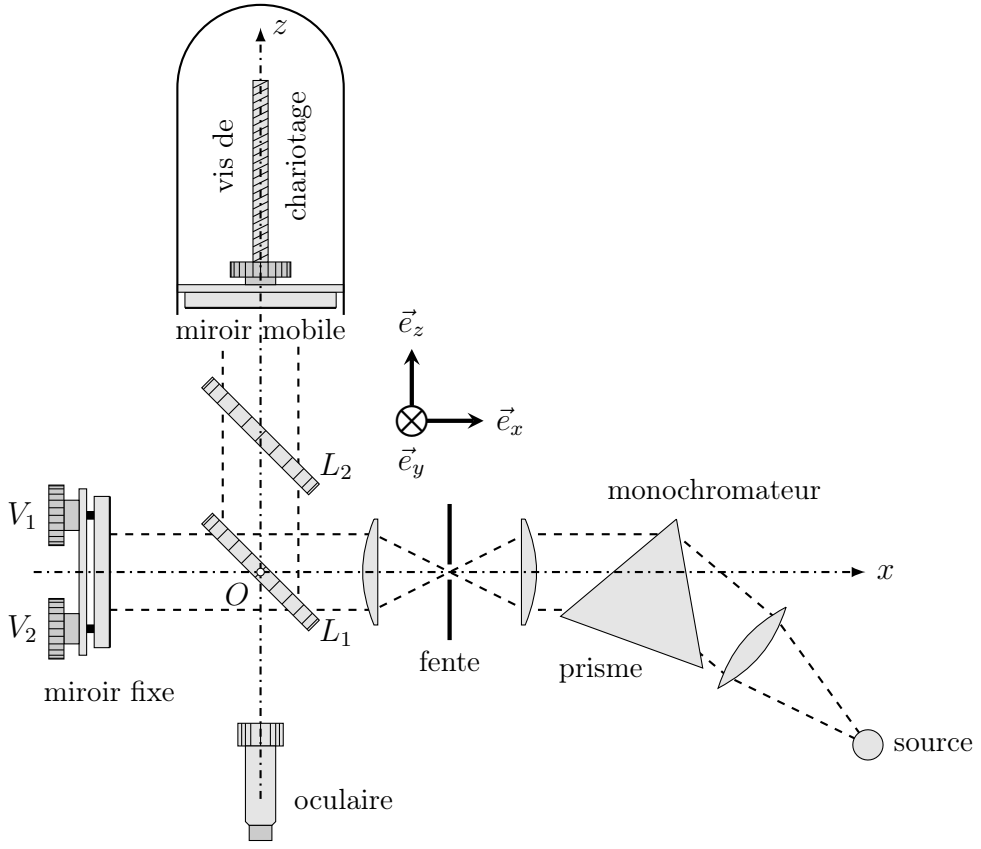


FIGURE 2 – Dispositif de mesure en spectroscopie interférentielle

❑ – **9**. L'interféromètre comporte deux lames de verre L_1 et L_2, parallèles, de même épaisseur e et de même indice optique n, inclinées d'un angle $\pi/4$ relativement à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ normal au miroir fixe. La lame L_1 est munie d'une couche semi-réfléchissante sur *une seule* de ses faces ; laquelle ? Justifier, en vous appuyant sur un schéma.

❑ – **10**. Après réglage des vis V_1 et V_2 les miroirs fixe et mobile sont rendus rigoureusement perpendiculaires ; l'axe optique $(O, \vec{e}_z)$ de l'oculaire est alors confondu avec la normale au miroir mobile et l'opérateur observe, au moyen de cet oculaire réglé à l'infini, des franges d'interférence. Quelle est la forme de ces franges ?

Peut-on encore les observer si l'oculaire est déréglé ?

❑ – **11**. Tout en observant les franges, l'observateur peut actionner la vis micrométrique et déplacer le miroir mobile dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, le long de l'axe $(O, \vec{e}_z)$. Relier le nombre ΔN de franges sombres qui défilent au centre du champ et le décalage Δz du miroir mobile.

❑ – **12**. Exprimer, au moyen d'un schéma approprié, la différence de marche observée à l'infini dans une direction donnée, en fonction de l'écart séparant les deux miroirs.

Le déplacement maximal de la vis micrométrique à partir du contact optique est noté $\Delta z_{\max}$. Déterminer, après ce déplacement, l'angle $\Delta\theta$ qui sépare le centre de la figure de la première frange de même nature.

❑ – **13**. Dans le cas d'une des raies de l'hydrogène atomique, on observe le défilement de $N = 3\,156$ franges pour un décalage $\Delta z = 1\,035 \pm 2\,\mu\text{m}$. S'agit-il de la raie H_α ou H_β ?

Avec quelle précision relative mesure-t-on sa longueur d'onde λ_0 ?

Que vaut alors $\Delta\theta$? Commenter.

III.B Cohérence spectrale d'une source

Une source de lumière éclaire avec la même intensité I_0 les deux voies d'un interféromètre ; l'observation est réalisée en un point où la différence de marche est δ.

❑ – **14**. Dans le cas où la source est rigoureusement monochromatique, de longueur d'onde λ_0, exprimer l'intensité $I(\delta)$ en fonction de I_0, λ_0 et δ. Définir et calculer le facteur de contraste C des franges.

Certaines sources lumineuses sont en fait *bichromatiques* : elles émettent deux radiations de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2 et on pose alors $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$ en admettant toujours $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

❑ – **15**. Pour certaines sources bichromatiques les deux radiations émises sont de même intensité ; c'est le cas des lampes à vapeur de sodium, étudiées notamment par MICHELSON dans les conditions décrites en **III.A**. Expliciter l'intensité I observée en fonction de I_0, de la différence de marche δ, de λ_0 et de $\Delta\lambda$.

Exprimer le facteur de contraste C des franges et montrer comment il permet la mesure de $\lambda_0/\Delta\lambda$.

❑ – **16**. D'autres sources, comme celles émettant la raie H_α de l'hydrogène, peuvent être écrites comme bichromatiques mais les intensités I_1 et $I_2 < I_1$ émises aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont différentes. Pour quelle(s) valeur(s) de δ le facteur de contraste des franges est-il minimal ? Quelle est cette valeur minimale ?

Dans le cas de la raie double H_α, l'écart $\Delta\lambda$ est de l'ordre de $1{,}4\times10^{-11}$ m. Est-il possible de le mettre en évidence avec le montage proposé ci-dessus ?

III.C Les tubes à hydrogène

Pour l'étude du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène, une première technique[1], initiée dans les années 1930, a consisté à utiliser un tube AB contenant de l'hydrogène moléculaire (dihydrogène, formule $\mathtt{H_2}$) sous faible pression (150 mbar) soumis à des décharges électriques de

1. D. Chalonge et Ny Tsi Zé, *J. Phys. Radium*, 1930

haute tension entre deux électrodes E_1 et E_2 ; l'observation se fait au travers d'une fenêtre de quartz F (cf. figure 3). Le spectre d'émission obtenu présente la superposition d'un fond quasi-continu et de raies bien identifiées, comme le montre la figure 4 tirée de l'article présentant la technique originelle.

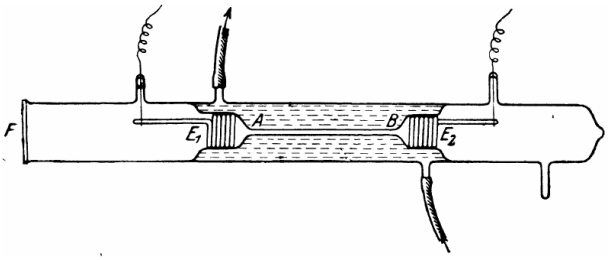


FIGURE 3 – Illustration du dispositif : reproduction de la figure 1 de l'article originel

❑ – **17**. Quel est le rôle du circuit à circulation d'eau qui entoure le tube central ?
Sur le spectre proposé en figure 4, quelle est l'unité de la graduation donnée en abscisse ?
Quelle est, à votre avis, l'origine du fond continu (essentiellement dans le proche ultra-violet) marqué en trait pointillé gris ?

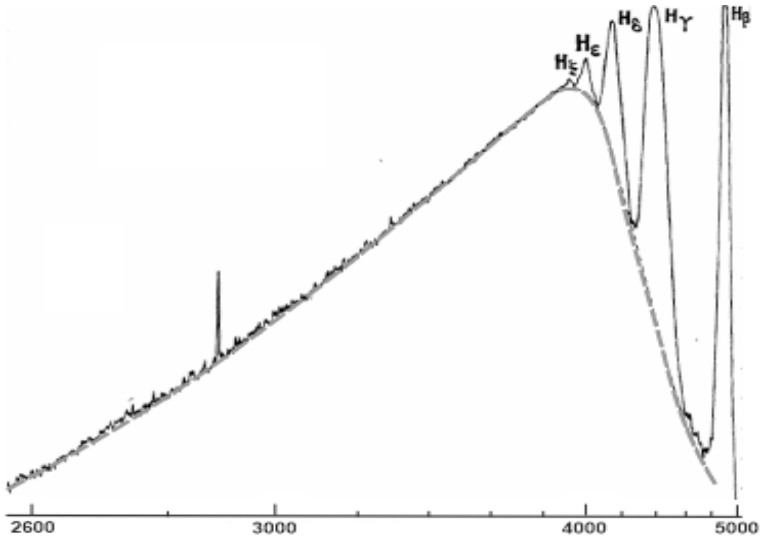


FIGURE 4 – Spectre d'émission du tube à hydrogène en échelle logarithmique

On préfère actuellement utiliser des lampes à décharge d'une constitution différente : il s'agit de tubes à décharge remplis de vapeur d'eau permettant l'obtention d'un spectre atomique sans bande continue. En présence des décharges à haute tension, ce type de lampe est le siège des réactions $\mathtt{H_2O} = \mathtt{HO} + \mathtt{H}$.

❑ – **18**. Quelle propriété du spectre d'émission de la molécule hydroxyle HO est ici mise à profit ?

Ces lampes contiennent une certaine proportion d'*eau lourde*, molécules HDO dans laquelle un des deux atomes d'hydrogène ${}^1_1\mathtt{H}$ est remplacé par un atome de deutérium ${}^2_1\mathtt{D}$, dont le noyau est formé d'un proton et d'un neutron. Si on tient compte de la masse m_N du noyau atomique, on peut montrer que la longueur d'onde d'émission d'une des raies spectrales de l'hydrogène atomique vérifie la relation :

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{m_e + m_N}{m_N}$$

où m_e est la masse de l'électron et λ_∞ la longueur d'onde idéale si $m_N \to \infty$.

❑ – **19**. Les raies d'émission du deutérium sont-elles, par rapport à celle de l'hydrogène ordinaire, décalées vers le bleu ou vers le rouge ?

De quelle résolution spectrale (en nanomètre) faut-il disposer pour séparer les raies de l'hydrogène et celles du deutérium ?

À partir d'une lecture de la courbe de la figure 4, faire l'application numérique dans le cas de la raie H_β.

IV L'équation de Klein–Gordon

Lors du développement de la mécanique quantique (ou mécanique ondulatoire), l'onde de matière $\underline{\Psi}(\vec{r},t)$ a d'abord été considérée comme solution de l'équation de Schrödinger (4) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\Psi} + V(\vec{r})\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} \qquad \text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ et } \mathrm{i}^2 = -1 \tag{4}$$

pour une particule de masse m repérée par sa positon $\vec{r}$ et soumise à l'interaction décrite par la fonction potentiel scalaire $V(\vec{r})$. En 1926, Klein et Gordon en ont proposé une version modifiée qu'on écrira :

$$\hbar^2c^2\Delta\underline{\Psi} + \left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r})\right)^2\underline{\Psi}(\vec{r},t) = m^2c^4\underline{\Psi}(\vec{r},t) \tag{5}$$

Dans la suite on s'intéressera exclusivement aux solutions de l'une ou l'autre équation, de la forme :

$$\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \underline{\psi}_0 \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(Et - p(E)x\right)\right]$$

où $\underline{\psi}_0$ est une certaine constante complexe, x est l'une des coordonnées cartésiennes de $\vec{r}$, $E > 0$ est l'énergie de la particule et $p(E) > 0$ son impulsion.

❑ – **20**. L'état associé à cette fonction d'onde est-il stationnaire ?

Dans quel sens le mouvement de la particule décrite par cette onde a-t-il lieu ?

Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g en fonction de E, de $p(E)$ et de sa dérivée.

❑ – **21**. Exprimer $p(E)$ et $v_g(E)$ dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de Schrödinger dans un domaine où V est constant. En déduire le caractère relativiste ou non du modèle associé à l'équation de Schrödinger.

❑ – **22**. Répondre aux mêmes questions dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de Klein–Gordon (5).

On s'intéresse enfin à la résolution du problème physique suivant : la particule étudiée est libre ($V = 0$) pour $x < 0$ et $x > a$ et pourvue d'une énergie E, tandis que, dans l'intervalle $x \in [0,a]$, elle est soumise à une interaction caractérisée par $V = V_0 > E$ (figure 5) et même $V_0 - E > mc^2$. Les solutions de l'équation (de Schrödinger ou de Klein–Gordon) seront donc écrites, pour $x < 0$ et $x > a$, sous les formes respectives :

$$\underline{\Psi}(x<0,t) = \underline{\psi}_0 \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(Et - px\right)\right] + \underline{R}\,\underline{\psi}_0 \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(Et + px\right)\right]$$

$$\underline{\Psi}(x>a,t) = \underline{T}\,\underline{\psi}_0 \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(Et - px\right)\right]$$

où $\underline{T}$ et $\underline{R}$ sont deux constantes complexes.

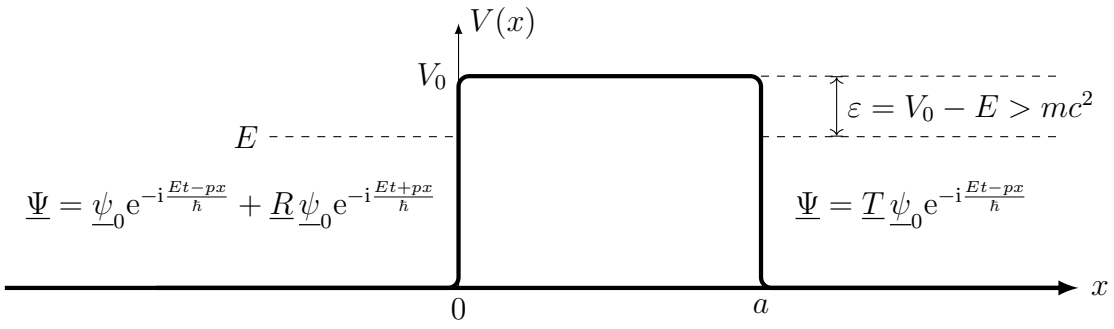


FIGURE 5 – Barrière de potentiel

On se place d'abord dans le cas de l'équation de SCHRÖDINGER.

❑ – **23**. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine $x \in [0,a]$?
Quelles relations permettent de calculer $\underline{R}$ et $\underline{T}$? *On ne demande pas de les exprimer ici !*
Quel phénomène physique peut-on mettre ainsi en évidence ?
Quelle est l'interprétation physique de $|\underline{T}|^2$?

On se place maintenant dans le cas de l'équation de KLEIN–GORDON.

❑ – **24**. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine $x \in [0,a]$? On notera qu'en introduisant $\varepsilon = E - V_0$, on a $q^2 = \dfrac{(\varepsilon - mc^2)(\varepsilon + mc^2)}{c^2} > 0$.

Les mêmes relations que dans l'étude de la barrière de potentiel dans le cadre de l'équation de SCHRÖDINGER conduisent, pour l'onde de KLEIN–GORDON, à la relation (que l'on admettra) :

$$|\underline{T}|^2 = \frac{1}{|\cos\varphi - \mathrm{i}\alpha \sin\varphi|^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{qa}{\hbar}$$

❑ – **25**. Déterminer la valeur maximale de $|\underline{T}|^2$. Commenter.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Interféromètre de Michelson
- Mesures et incertitudes
- Modèle scalaire des ondes lumineuses

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/mpi