Concours commun Mines-Ponts, France

# Session 2000, filière PC

## Mathématiques 1

Durée : 3 heures

### Ce que traite le sujet

- Questions 1 à 3 : définition du réel étudié, cas n = 2 et n = 3
- Questions 4 et 5 : minoration par les racines n-ièmes de l'unité et inégalité de Hadamard
- Questions 6 et 7 : majoration et recherche des vecteurs extrémaux

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/pc/2000/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

00 MATH. I - PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURDS D'ADMISSION 2000

**MATHÉMATIQUES**

**PREMIÈRE ÉPREUVE**
**FILIÈRE PC**
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

**L'emploi de la calculette est interdit**.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$). Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$. A un vecteur $X$ de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$, de coordonnées $x_1, x_2, ..., x_n$, est associée la matrice $V(X)$ dont les éléments $V(X)_{p,q}$, $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, sont définis par la relation :

$$V(X)_{p,q} = (x_p)^{q-1}.$$

Le déterminant $v(X)$ de la matrice $V(X)$ est un déterminant de Van der Monde ; il est admis que sa valeur est donnée par la relation suivante :

$$v(X) = \det V(X) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (x_q - x_p).$$

Il est admis que l'application $\|.\|$ de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{R}^+$ :

$$X \mapsto \|X\| = \sup_{1 \leq p \leq n} |x_p|,$$

est une norme. Soit $E_n$ l'espace vectoriel normé $(\mathbf{C}^n, \|.\|)$.

Le but du problème est de montrer qu'à cette application $v$ de $E_n$ dans $\mathbf{C}$ peut être associé un réel $\rho$ tel que, pour tout vecteur $X$ de $E_n$ la relation suivante a lieu :

$$|v(X)| \leq \rho \, \|X\|^{n(n-1)/2},$$

où le réel $\rho$ est une valeur prise pour un vecteur unitaire particulier $W$ :

$$\rho = |v(W)|, \text{ avec : } \|W\| = 1.$$

**1**. **Définition du réel** $\rho$ :

L'entier $n$ est fixé ($n \geq 2$).

a. Comparer pour tout vecteur $X$ de l'espace vectoriel normé $E_n$ et tout nombre complexe $\lambda$ les deux expressions $v(\lambda.X)$ et $v(X)$.

En particulier, étant donné un vecteur $X$ de $E_n$, soit $Y$ un vecteur de $E_n$ de norme unité vérifiant la relation : $X = \|X\|.Y$ ; exprimer le nombre complexe $v(X)$ en fonction de $v(Y)$ et de $\|X\|$.

b. Démontrer que l'application $v$ de l'espace vectoriel normé $E_n$ dans **C** est continue. En déduire que l'application continue $X \mapsto |v(X)|$ admet un maximum sur la sphère unité $S$,

$$S = \{X \in E_n \mid \|X\| = 1\},$$

atteint pour au moins un vecteur $W$. Soit $\rho$ le maximum de cette fonction sur la sphère unité :

$$\rho = \max_{\|X\|=1} |v(X)|.$$

c. Démontrer les deux relations :

**i**. pour tout vecteur $X$ de $E_n$, $|v(X)| \leq \rho \, \|X\|^{n(n-1)/2}$ ;

**ii**. il existe au moins un vecteur unitaire $W$ de $E_n$ tel que

$$|v(W)| = \rho.$$

**2**. **Cas** $n = 2$ :

Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_2 \mid \|X\| = 1\}.$$

Déterminer le maximum $\rho$ de la fonction $X \mapsto |v(X)|$ sur la sphère unité. Démontrer que les vecteurs unitaires qui rendent maximum $|v(X)|$ sont proportionnels à un même vecteur $X_1$ dont la première coordonnée est égale à 1. Les déterminer.

**3**. **Cas** $n = 3$ :

a. Etant donnés trois réels positifs ou nuls $t_1$, $t_2$ et $t_3$, $\left(t_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 3\right)$ démontrer l'inégalité suivante

$$t_1.t_2.t_3 \leq \frac{1}{27}(t_1 + t_2 + t_3)^3.$$

Démontrer que l'égalité a lieu si et seulement si les trois réels $t_1, t_2, t_3$ sont égaux.

b. Etant donnés trois nombres complexes $x_1$, $x_2$ et $x_3$, soient $A, B$ et $C$ les trois fonctions des variables $x_1$, $x_2$ et $x_3$ définies par les relations suivantes :

$$A = |x_1 - x_2|^2 + |x_2 - x_3|^2 + |x_3 - x_1|^2$$

$$B = \sum_{k=1}^{3} |x_k|^2 \quad ; \quad C = \left| \sum_{k=1}^{3} x_k \right|^2.$$

Démontrer que $A$ est une combinaison linéaire de $B$ et de $C$.

c. Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_3 \mid \|X\| = 1\}.$$

d. Calculer, pour un vecteur $X$ quelconque de l'espace $E_3$, l'expression $|v(X)|^2$. En déduire une valeur possible pour le réel $\rho$. Déterminer les équations que vérifient les coordonnées $x_1$, $x_2$ et $x_3$ d'un vecteur $W$ unitaire rendant $|v(W)|$ maximum. Exhiber une solution à l'aide des racines cubiques de l'unité. En déduire le réel $\rho$.

**4**. **Une minoration du réel $\rho$** :

Soit $\Omega$ le vecteur unitaire dont les coordonnées $\omega_p, 1 \leq p \leq n,$ sont définies par la relation :

$$\omega_p = e^{2i(p-1)\pi/n} = \exp\left(\frac{2\,i\,(p-1)\,\pi}{n}\right).$$

a. $V(\Omega)$ est la matrice définie à partir du vecteur $\Omega$ ; $\overline{V(\Omega)}$ est la matrice complexe conjuguée. Démontrer que la matrice produit $\overline{V(\Omega)}.V(\Omega)$ est une matrice proportionnelle à la matrice identité.

b. En déduire la valeur du module $|v(\Omega)|$ du déterminant de la matrice $V(\Omega)$ et une minoration du réel $\rho$.

**5**. **Une inégalité de Hadamard** :

Dans cette question il est admis que l'application de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$ qui, à deux vecteurs $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n},$ fait correspondre le nombre complexe $(X \mid Y),$ défini par la relation suivante

$$(X \mid Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}.y_i,$$

est un produit scalaire hermitien. Soit $F_n$ l'espace préhilbertien $(\mathbf{C}^n, (. \mid .))$.

La norme déduite de ce produit scalaire est notée $\|.\|_2$ ; elle est définie par la relation :

$$\|X\|_2 = \sqrt{(X \mid X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Etant donnée une suite de $n$ vecteurs indépendants $V_1, V_2, ..., V_n$ de l'espace préhilbertien $F_n$, soit $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$.

a. Déterminer, lorsque les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$ sont deux à deux orthogonaux, le produit $B$ de la matrice transposée de la matrice complexe conjuguée de la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ avec la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ :

$$B = {}^t\overline{M(V_1, V_2, ..., V_n)}.M(V_1, V_2, ..., V_n).$$

Que vaut le module du déterminant de la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ ?

b. Soit $U_1, U_2, ..., U_n$ les vecteurs de l'espace $F_n$ définis de la manière suivante :

- $U_1 = V_1$ ,
- $U_2 = V_2 - proj_1(V_2)$ ; $proj_1(V_2)$ est le vecteur projection du vecteur $V_2$ sur la droite

vectorielle engendrée par $V_1$ ,

• pour tout entier $i$ compris entre 3 et $n$ ($3 \leq i \leq n$) : $U_i = V_i - proj_{i-1}(V_i)$ ; $proj_{i-1}(V_i)$ est le vecteur projection du vecteur $V_i$ sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_{i-1}$.

Démontrer l'égalité entre les déterminants des deux matrices $M(V_1,\ V_2, ..., V_n)$ et $M(U_1,\ U_2, ..., U_n)$ :

$$\det M(U_1,\ U_2, ..., U_n) = \det M(V_1,\ V_2, ..., V_n).$$

c. Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$\left|\det M(V_1,\ V_2, ..., V_n)\right| \leq \|V_1\|_2.\|V_2\|_2...\|V_n\|_2.$$

Démontrer, lorsque les vecteurs $V_1,\ V_2, ..., V_n$ sont tous différents de 0, qu'il y a égalité entre les deux membres de cette relation si et seulement si les vecteurs $V_1,\ V_2, ..., V_n$ sont deux à deux orthogonaux.

**6**. **Une majoration du réel** $\rho$ :

Démontrer pour tout vecteur $X$ de l'espace vectoriel $E_n$, de coordonnées $x_1, x_2, ..., x_n$, l'inégalité suivante :

$$|v(X)|^2 \leq \prod_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} |x_q|^{2(p-1)}.$$

Déterminer pour un vecteur $X$ unitaire ($\|X\| = 1$) de l'espace vectoriel $E_n$ une majoration du module $|v(X)|$. En déduire la valeur du réel $\rho$.

**7**. **Recherche des vecteurs** $W$ :

Soit $W$ un vecteur unitaire de l'espace $E_n$, de coordonnées $x_p, 1 \leq p \leq n$, pour lequel le déterminant $v(W)$ de la matrice $V(W)$ a un module égal au réel $\rho = n^{n/2}$ :

$$|v(W)| = n^{n/2}.$$

a. Démontrer que les coordonnées $x_p, 1 \leq p \leq n$ de ce vecteur $W$ sont deux à deux différentes l'une de l'autre :

pour tout couple d'entiers $p$ et $q$, $p \neq q$, $x_p \neq x_q$.

b. Démontrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Hadamard, que les coordonnées $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$, de ce vecteur ont toutes un module égal à 1 et vérifient les $n - 1$ relations suivantes :

$$\sum_{p=1}^{n} x_p = 0,\ \sum_{p=1}^{n} (x_p)^2 = 0, ..., \sum_{p=1}^{n} (x_p)^{n-1} = 0.$$

A ce vecteur $W$ est associé le polynôme $P_W$ défini par la relation suivante : pour tout réel $t$,

$$P_W(t) = \prod_{p=1}^{n} (t - x_p).$$

Ce polynôme $P_W$ peut aussi être écrit sous la forme :

$$P_W(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, t^k.$$

c. Que vaut le coefficient $\alpha_n$ ? Démontrer qu'il est possible de poser $\alpha_0 = -e^{i\,\theta_0}$ où $\theta_0$ est un réel.

Soit $F_W$ la fraction rationnelle définie par la relation :

$$F_W(t) = \frac{P'_W(t)}{P_W(t)}.$$

$P'_W(t)$ est le polynôme dérivée du polynôme $P_W$.

d. Démontrer que, sur l'ensemble de définition de la fraction rationnelle $F_W$, la relation ci-dessous a lieu. :

$$F_W(t) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{t - x_p}.$$

En déduire qu'il existe un réel $R$ $(R > 0)$ tel que sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ la fonction $F_W$ est développable en série entière. Déterminer un minorant du réel $R$.

La fonction $F_W$ est donc dans l'intervalle $]-R, R[$ la somme d'une série entière qui s'écrit :

$$F_W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, t^k.$$

e. Déterminer les coefficients $f_k, k = 0, 1, ...,$ à l'aide des coordonnées du vecteur $W$. Quelle conclusion en tirer sur les $n - 1$ premiers coefficients $f_0, f_1, ..., f_{n-2}$ ?

f. Déduire des résultats précédents l'expression du polynôme $P'_W$, polynôme dérivée du polynôme $P_W$. Déterminer le polynôme $P_W$, puis les coordonnées $x_p, 1 \leq p \leq n$ du vecteur $W$. Calculer, à titre de vérification, les normes de ce vecteur dans $E_n$ et dans $F_n$ c'est-à-dire $\|W\|$ et $\|W\|_2$.

g. Combien y-a-t-il de vecteurs $W$ dont une au moins des coordonnées est égale à 1 ?

FIN DU PROBLÈME

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Espaces vectoriels normés
- Compléments d'algèbre linéaire
- Nombres complexes et trigonométrie
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Séries entières

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/pc