Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2002, filière PC

Mathématiques 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Première partie : exemples et résultats généraux
- Deuxième partie : matrices positives
- Troisième partie : approximation de la solution

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/pc/2002/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2002 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PC

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PC.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, I est le segment $[0,1]$, f est une fonction réelle définie et continue sur le segment I, p est une fonction définie et continue sur le segment I, positive (pour tout réel x de I, $p(x) \geq 0$).

L'objet du problème est l'étude et l'approximation des solutions réelles, définies sur le segment I, deux fois continûment dérivables (de classe C^2) des équations différentielles suivantes :

$$\mathbf{E}_0 \qquad -u''(x) + p(x)\,u(x) = 0,$$

$$\mathbf{E} \qquad -u''(x) + p(x)\,u(x) = f(x).$$

vérifiant, en outre, les conditions suivantes aux extrémités du segment I :

$$\mathbf{C} \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Une fonction u, de classe C^2, définie sur le segment I, vérifiant les conditions **C**, est dite solution du problème P_0 si elle est solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_0$, respectivement solution du problème P si elle est solution de l'équation différentielle **E**.

Première partie

Exemples, résultats généraux.

I-1. **Exemples** :

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle **E** vérifiant les conditions **C** dans les deux cas suivants :

a. La fonction p est nulle et la fonction f constante et égale à 1 :

$$p(x) = 0, \quad f(x) = 1.$$

b. La fonction p est constante et égale à 1 ; la fonction f est la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ où α est un réel donné :

$$p(x) = 1, \quad f(x) = e^{\alpha x}.$$

I-2. **Unicité des solutions** :

a. Soit u une fonction solution de l'équation $\mathbf{E}_0$ vérifiant les conditions **C** ; démontrer que cette solution u vérifie la relation :

$$\int_0^1 \left[u'(x)^2 + p(x)\, u(x)^2 \right] dx = 0.$$

En déduire que la seule solution du problème P_0 est la solution nulle.

b. Démontrer que, pour des fonctions p et f données, il existe, au plus, une solution du problème P.

I-3. **Existence d'une solution** :

a. Étant données deux fonctions u_1 et u_2 solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E}_0$, soit g la fonction définie sur l'intervalle I par la relation suivante :

$$g(x) = u_1(0)\, u_2(x) - u_2(0)\, u_1(x).$$

Démontrer que, si la fonction g s'annulle au point 1 ($g(1) = 0$), la fonction g est nulle sur l'intervalle I.

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les deux solutions u_1 et u_2 pour que la fonction g ne s'annulle pas en 1 ($g(1) \neq 0$).

Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E}_0$, v une solution de l'équation **E** et λ et μ deux scalaires. Soit u et X la fonction et le vecteur définis par les relations suivantes :

$$u(x) = \lambda\, u_1(x) + \mu\, u_2(x) + v(x) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

b. Démontrer que, pour que la fonction u soit solution du problème P, il faut et il suffit que le vecteur X vérifie la relation matricielle suivante :

$$U.X = B,$$

où U est une matrice carrée d'ordre 2 et B un vecteur qui seront précisés.

c. Démontrer que le problème P admet une solution unique.

Deuxième partie

Quelques propriétés de certaines matrices de $M_n(\mathbf{R})$.

Il est admis que l'application de l'espace $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^+$:

$$X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \mapsto \|X\| = \sup_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|,$$

est une norme. Il est admis que l'application de l'espace des matrices carrées d'ordre n, $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^+$:

$$A \mapsto N(A) = \sup_{\|X\|\leq 1} \|A.X\|,$$

est une norme. Un vecteur $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbf{R}^n$ est dit positif si toutes ses coordonnées x_i sont positives ou nulles ($x_i \geq 0$). Cette propriété s'écrit :

$$X \geq 0.$$

Une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ est dite positive si tous ses termes a_{ij} sont positifs ou nuls. Cette propriété s'écrit :

$$A \geq 0.$$

Étant donnée la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$, soit E le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1 : $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

II-1. Quelques propriétés matricielles :
Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que, pour que cette matrice A soit positive, il faut et il suffit que le vecteur image de tout vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ soit positif.

b. Établir la propriété : pour tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$,

$$\|A.X\| \leq N(A)\ \|X\|.$$

c. Démontrer, pour une matrice A positive, la relation :

$$N(A) \leq \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Comparer les deux expressions $N(A)$ et $\|A.E\|$; en déduire la norme de la matrice A.

d. Soit A une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ possédant la propriété suivante : chaque fois qu'un vecteur X de $\mathbf{R}^n$ a une image positive ($A.X \geq 0$), le vecteur X est positif ($X \geq 0$). Démontrer que la matrice A est injective puis qu'elle est inversible et que son inverse A^{-1} est une matrice positive.

II-2. **Un exemple** :

Soient A et H les deux matrices carrées d'ordre n suivantes :

Les termes de la matrice A situés sur la diagonale principale sont égaux à 2, ceux situés juste au dessus et juste au dessous à -1, les autres sont nuls.

La matrice H est diagonale et positive ; les termes h_i, $1 \leq i \leq n$, de la diagonale principale sont positifs ou nuls ($h_i \geq 0$) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}.$$

a. Soit X un vecteur de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, tel que le vecteur $(A + H).X$ soit positif.

Démontrer que le vecteur X est positif à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, par exemple, en complétant la suite $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ par des termes x_0 et x_{n+1} nuls ($x_0 = x_{n+1} = 0$), et en considérant l'entier k pour lequel le réel x_k est égal au plus petit des réels x_i, $0 \leq i \leq n + 1$:

$$x_k = \min_{0\leq i\leq n+1} x_i.$$

b. Déduire du résultat précédent que les deux matrices $A + H$ et A sont inversibles.

II-3. **Norme de la matrice** $(A + H)^{-1}$:

Soit V et W les deux vecteurs définis par les relations suivantes :

$$V = (A + H)^{-1}E, \quad W = A^{-1}E.$$

a. Démontrer que ces vecteurs sont positifs ainsi que le vecteur $A(W - V)$.

b. Comparer les normes des deux vecteurs V et W ; en déduire : pour tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$,

$$\left\| (A + H)^{-1}.X \right\| \leq \|W\| \, \|X\|.$$

II.4. Une majoration de la norme du vecteur W :

Soit S l'ensemble des suites réelles infinies $(x_k)_{k\geq 0}$ vérifiant, pour $k > 0$, la relation de récurrence suivante :

$$-x_{k-1} + 2\,x_k - x_{k+1} = 1.$$

Soit S_0 l'ensemble des suites réelles $(x_k)_{k\geq 0}$ vérifiant, pour $k > 0$, la relation de récurrence suivante :

$$-x_{k-1} + 2\,x_k - x_{k+1} = 0.$$

a. Déterminer les suites qui appartiennent à l'espace S_0.

b. Déterminer une suite $(y_k)_{k\geq 0}$ appartenant à l'espace S qui soit un monome du deuxième degré :

$$y_k = a\,k^2.$$

c. Déterminer les suites qui appartiennent à l'espace S ; en particulier celles qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = 0.$$

d. Déterminer les coordonnées du vecteur $W = A^{-1}E$; en déduire que la norme de ce vecteur vérifie l'inégalité suivante :

$$\|W\| \leq \frac{1}{8}(n+1)^2.$$

Troisième partie

Approximation de la solution du problème P.

Dans toute la suite l'entier n est supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$). Soit h et $t_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$ les réels définis par les relations suivantes :

$$h = \frac{1}{n+1}, \quad t_k = h.k = \frac{k}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n+1.$$

III-1 Une approximation de la dérivée seconde :

Soit u une fonction quatre fois continûment dérivable sur le segment I. Soit M le maximum de la valeur absolue de la dérivée quatrième :

$$M = \sup_{x\in I} |u^{(4)}(x)|.$$

Soient t et h des réels tels que les réels $t - h$ et $t + h$ appartiennent au segment I. Démontrer l'existence d'une fonction R des réels t et h qui vérifient les relations suivantes :

$$u(t+h) + u(t-h) - 2\,u(t) = h^2\,u''(t) + R(t,h)\ , \quad |R(t,h)| \leq \frac{h^4}{12}\,M.$$

III-2. **Problème** *P* **discrétisé** :

a. Démontrer que, si les deux fonctions *p* et *f* sont deux fois continûment dérivables, la solution *u* du problème *P* est quatre fois continûment dérivable.

Soient *X* et *Y* les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et *H* la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définis par les relations suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \cdots \\ u(t_n) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} f(t_1)\,h^2 \\ f(t_2)\,h^2 \\ \cdots \\ f(t_n)\,h^2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} p(t_1)\,h^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(t_2)\,h^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(t_n)\,h^2 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer, en désignant toujours par *A* la matrice définie à la question II-2, un majorant de la norme du vecteur $Z = (A + H).X - Y$, au moyen des réels *M* et *h*.

Soit $\widetilde{X}$ le vecteur défini par la relation suivante :

$$\widetilde{X} = (A + H)^{-1}Y.$$

c. Démontrer la majoration :

$$\left\| X - \widetilde{X} \right\| \leq K\,h^2,$$

où *K* est une constante ; en donner une valeur à l'aide de *M*.

Donner une signification du vecteur $\widetilde{X}$. Préciser comment ce vecteur se calcule.

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces vectoriels normés
- Compléments d'algèbre linéaire
- Suites récurrentes
- Dérivabilité et convexité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/pc