Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2004, filière PC

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Questions 1 à 5 : propriétés des fonctions de F et des suites de S
- Questions 6 à 11 : produit de convolution et lois usuelles
- Questions 12 à 19 : moyenne et variance

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/pc/2004/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2004 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.

Cet énoncé comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce problème met en évidence par une méthode originale une propriété et une méthode de calcul de la moyenne et de la variance bien connues en Probabilités.

Soit S l'ensemble des suites réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes u_n sont positifs ou nuls et la somme égale à 1 :

$$S = \left\{ U \mid U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \quad \forall n,\ u_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 \right\}.$$

Soit F l'ensemble des fonctions réelles f qui sont des sommes de série entière de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 ; ces séries entières sont convergentes lorsque le réel x est égal à 1 et leur somme vaut 1 en ce point ; toutes les dérivées des fonctions f en 0 sont positives ou nulles :

$$F = \left\{ f \mid f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1,\ R \geq 1, \quad \forall n,\ f^{(n)}(0) \geq 0 \right\}.$$

À une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appartenant à S, est associée la fonction f définie par la relation suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ x^n.$$

Soit j l'application ainsi définie : $U \longmapsto f = j(U)$; la fonction $j(U)$ est notée $\widehat{U}$.

Propriétés des fonctions de F et des suites de S :

1. Démontrer que toute fonction f, qui appartient à l'ensemble F, est, sur l'intervalle ouvert $I =]-1,1[$, une fonction indéfiniment dérivable, croissante sur le segment $[0,1]$ et convexe sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$.

2. Démontrer que toute fonction f, qui appartient à l'ensemble F, est continue à gauche en 1.

Exemples : soient G, E^q et V les trois suites définies par les relations suivantes :

· G est la suite géométrique de terme général $g_n = 1/2^{n+1}$:

$$G = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

· Étant donné un entier naturel q, E^q est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme de rang q égal à 1 :

$$E^q = (0,\dots,0,1,0,\cdots).$$

· $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de réels définie par les relations suivantes :

$$v_0 = 1/2 \ ; \ \text{pour } n \geq 1, \ v_n = \frac{a}{n^2} \text{ avec } a = \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1} .$$

3. Montrer que les suites G, E^q et V sont dans S. Déterminer les images $\widehat{G} = j(G)$, $\widehat{E^q} = j(E^q)$ des suites G et E^q ; calculer la dérivée $\widehat{V}'$ de la fonction $\widehat{V} = j(V)$ image de la suite V ; puis donner l'expression de $\widehat{V}(x)$ à l'aide d'une intégrale.

4. Soit f une fonction appartenant à l'ensemble F.

Démontrer que, si la fonction f est nulle en 0 ($f(0) = 0$), la fonction f est, soit égale à x sur le segment $[0,1]$, soit strictement majorée par x sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ ($0 < x < 1 \Longrightarrow f(x) < x$).

Démontrer que, si la fonction f est strictement positive en 0 ($f(0) > 0$), l'équation

$$f(x) = x$$

a, dans l'intervalle ouvert $]0,1[$, au plus une solution.

5. Démontrer que, pour toute suite U appartenant à l'ensemble S, la fonction $j(U)$ appartient à l'ensemble F. Démontrer que l'application j est une application bijective de l'ensemble S sur l'ensemble F.

Une loi de composition dans l'ensemble S :

Étant données deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble S, soit $U * V$ la suite, dont les termes w_n, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par la relation suivante :

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \ v_{n-p}.$$

6. Démontrer que la suite $U * V = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie appartient à l'ensemble S.

7. Démontrer qu'étant données deux suites U et V de S, à la composée $U * V$ de ces suites correspond par l'application j le produit des fonctions $j(U)$ et $j(V)$:

$$j(U * V) = j(U)\ \ j(V) \quad \text{ou} \quad \widehat{U * V} = \widehat{U}\ .\ \widehat{V}.$$

8. Démontrer que la loi de composition $*$ définie ci-dessus est associative, a un élément neutre et est commutative.

Étant donnés un réel p, strictement compris entre 0 et 1 ($0 < p < 1$) et un réel λ strictement positif, soient B^p, Γ^p et Π^λ les suites définies de la manière suivante :

· B^p est la suite dont tous les termes β_n^p, $n \in \mathbb{N}$, sont nuls sauf les deux premiers : $\beta_0^p = 1 - p$ et $\beta_1^p = p$:

$$B^p = (1-p,\ p,\ 0,\ 0, \ldots).$$

· Γ^p est la suite de terme général $\gamma_n^p = (1-p)\ \ p^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma^p = ((1-p)\ \ p^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

· Π^λ est la suite de terme général $\pi_n^\lambda = \frac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\lambda}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\Pi^\lambda = \left(\frac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\ \lambda}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Produit de composition $*$ de chacune de ces suites q fois avec elle-même :

9. Démontrer que les trois suites B^p, Γ^p et Π^λ appartiennent à l'ensemble S. Déterminer leurs images $\widehat{B^p}$, $\widehat{\Gamma^p}$ et $\widehat{\Pi^\lambda}$ par l'application j.

10. Étant donné un entier naturel q strictement positif, déterminer les suites B^{p*q}, Γ^{p*q} et $\Pi^{\lambda*q}$ obtenues respectivement à partir des suites B^p, Γ^p et Π^λ par composition q fois avec elle-même. Préciser les termes de ces suites notés respectivement β_n^{p*q}, γ_n^{p*q} et $\pi_n^{\lambda*q}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour un réel λ donné, limite de la suite $B^{\frac{\lambda}{q}*q}$ lorsque l'entier q croît vers l'infini.

11. Le réel strictement positif λ est donné ; lorsque l'entier q est suffisamment grand, le rapport λ/q est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Déterminer, pour tout entier n fixé, la limite du terme

$$\beta_n^{\frac{\lambda}{q}*q} \text{ de rang } n \text{ de la suite } B^{\frac{\lambda}{q}*q},$$

lorsque l'entier q croît vers l'infini. Exprimer cette limite à l'aide du terme π_n^λ de rang n de la suite Π^λ.

Suite d'éléments de S :

12. Soit une suite $(U^q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'ensemble S. Soit u_n^q le terme de rang n de la suite U^q :

$$U^q = (u_n^q)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

Cette suite d'éléments de S est supposée telle que chacune des suites des termes de rang n $(u_n^q)_{q\in\mathbb{N}}$ est, lorsque l'entier q croît vers l'infini, une suite convergente de limite v_n.

Démontrer que la série de terme général v_n, $n \in \mathbb{N}$, est une série de terme général positif ou nul, convergente, de somme inférieure ou égale à 1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \leq 1.$$

Donner un exemple de suite $(U^q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'ensemble S telle que chacune des suites $(u_n^q)_{q\in\mathbb{N}}$ définie par les termes de rang n soit convergente et de limite v_n nulle.

Étant donné un réel r strictement positif ($r > 0$), soit S_r le sous-ensemble des éléments $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'ensemble S tels que la série de terme général $u_n\ n^r$, $n \in \mathbb{N}$, soit convergente.

$$S_r = \left\{ U \mid U \in S,\ U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ n^r < \infty \right\}.$$

Relation d'inclusion entre les sous-ensembles S_r :

13. Étant donnés deux réels r et s strictement positifs ($r > 0,\ s > 0$), démontrer que, si les réels r et s sont distincts l'un de l'autre ($r \neq s$), l'un des deux sous-ensembles S_r et S_s est contenu dans l'autre.

À une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble S_1, est associé le réel $M(U)$, appelé moyenne de U, défini par la relation suivante :

$$M(U) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ u_n.$$

À une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble S_2, est associé le réel $V(U)$, appelé variance de U, défini par la relation suivante :

$$V(U) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\ u_n - M(U)^2 .$$

Dans toute la suite du problème l'élément U de S appartient au sous-ensemble S_2.

Positivité de la variance :

14. Un résultat préliminaire : soient N un entier strictement positif et $A = (a_i)_{1\leq i\leq N}$ une suite de N réels strictement positifs ($1 \leq i \leq N,\ a_i > 0$). Démontrer que l'application φ qui, à deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$, $X = (x_i)_{1\leq i\leq N}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq N}$ associe le réel

$$\varphi(X,Y) = \sum_{i=1}^{N} a_i\ x_i\ y_i,$$

est un produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

15. Pour tout élément U de S_2, démontrer l'existence des deux grandeurs $M(U)$ et $V(U)$. Démontrer que la variance $V(U)$ est positive ou nulle :

$$V(U) \geq 0.$$

Indication : comparer, pour tout entier N, les deux expressions suivantes :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} n\ u_n\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right).\left(\sum_{n=1}^{N} n^2\ u_n\right).$$

Une expression approchée de la fonction $\widehat{U}$ à l'aide de la moyenne et de la variance :

16. Démontrer que les dérivées première $\widehat{U}'$ et seconde $\widehat{U}'$ de $\widehat{U}$ admettent une limite lorsque le réel x tend vers 1 par valeurs inférieures. Déterminer ces deux limites, notées $\widehat{U}'(1)$ et $\widehat{U}'(1)$, en fonction de $M(U)$ et $V(U)$.

17. Soit $x \longmapsto \varepsilon(x)$ la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par la relation suivante :

$$\varepsilon(x) = \widehat{U}'(1) - \widehat{U}'(x).$$

Démontrer, pour tout réel x compris strictement entre 0 et 1, l'inégalité suivante :

$$\left|\widehat{U}(x) - 1 - M(U)(x-1) - \frac{1}{2}\left(V(U) + M(U)^2 - M(U)\right)(x-1)^2\right| \leq \frac{1}{2}(x-1)^2\ \varepsilon(x).$$

Moyenne et variance des trois suites B^p, Γ^p et Π^λ :

18. Démontrer, lorsque p est un réel strictement compris entre 0 et 1 et λ un réel strictement positif, que les trois suites B^p, Γ^p et Π^λ définies ci-dessus, appartiennent à l'ensemble S_2.

19. Calculer pour chacune de ces suites B^p, Γ^p et Π^λ la moyenne et la variance. C'est-à-dire les six grandeurs :

$$M(B^p),\ V(B^p),\ M(\Gamma^p),\ V(\Gamma^p),\ M\left(\Pi^\lambda\right),\ V\left(\Pi^\lambda\right).$$

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries entières
- Suites et séries de fonctions
- Dérivabilité et convexité
- Variables aléatoires discrètes
- Ensembles dénombrables et familles sommables
- Séries numériques et vectorielles
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/pc