Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2012, filière PC

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- 1 La lemniscate de Bernoulli
- 2 Le sinus lemniscatique
- 3 Équation différentielle
- 4 Le calcul trigonométrique généralisé

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/pc/2012/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2012 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2012

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Le sinus lemniscatique

Dans ce texte on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1 La lemniscate de Bernoulli

La lemniscate de Bernoulli (voir la Figure 1) est une courbe elliptique particulièrement simple d'équation implicite

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2. \tag{1}$$

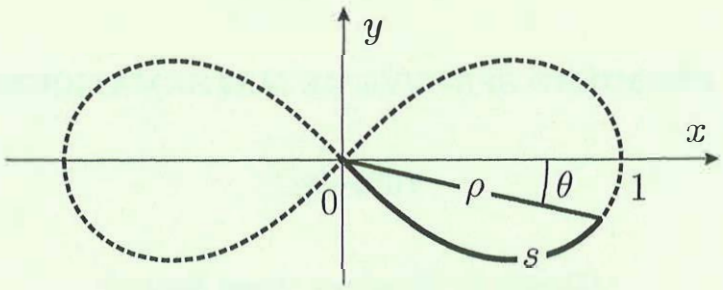


FIGURE 1 – La lemniscate de Bernoulli

Question 1 *Déterminer dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \leq 0$, une équation polaire de la lemniscate sous la forme $\rho = g(\theta)$ où la fonction g est définie sur l'intervalle $[-\pi/4, 0]$. Préciser les symétries permettant de recouvrer l'ensemble de la courbe.*

Question 2 *Montrer que g constitue une bijection de $[-\pi/4, 0]$ sur $[0, 1]$.*

Question 3 *Déterminer les tangentes à la lemniscate en $(0, 0)$*

Question 4 *Déterminer dans le demi-plan $x \geq 0$, une équation paramétrique de la lemniscate en fonction de ρ et en déduire que l'abscisse curviligne s vérifie l'équation différentielle suivante sur $[0, 1]$:*

$$s'(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}. \tag{2}$$

2 Le sinus lemniscatique

Question 5 *Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ converge.*

On note

$$\sigma = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}. \tag{3}$$

Question 6 *Que représente σ ?*

On définit la fonction F sur l'intervalle $[-1,1]$ par l'expression suivante :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}. \tag{4}$$

Question 7 *Montrer que la fonction F est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.*

Question 8 *Dessiner le graphe de F et en préciser le tableau de variations.*

Question 9 *Montrer que F est développable en série entière sur $]-1,1[$.*

Question 10 *Donner l'expression des coefficients a_n de cette série.*

Question 11 *Montrer que la série de terme général a_n converge (on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$) et a pour somme σ.*

Question 12 *Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1}, continue et impaire sur $[-\sigma,\sigma]$.*

Question 13 *Montrer que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\sigma,\sigma[$, calculer sa dérivée, en déduire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma,\sigma]$.*

On prolonge la fonction F^{-1} à $[-\sigma,3\sigma]$ en opérant sur son graphe une symétrie par rapport à la droite $x=\sigma$, puis on prolonge F^{-1} à $\mathbf{R}$ tout entier par périodicité, on note sl la fonction ainsi construite.

Question 14 *Montrer que* sl *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer sa fonction dérivée* sl' *en fonction de* sl.

Question 15 *Tracer le graphe de* sl *sur $[-3\sigma,3\sigma]$.*

3 Equation différentielle

Question 16 *Montrer que* sl *est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}$.*

$$\mathrm{sl}''(x) + 2\,\mathrm{sl}^3(x) = 0. \tag{5}$$

Soit f une solution de (5) sur $\mathbf{R}$.

Question 17 *Montrer que la fonction H définie par*

$$H(x) = f'^2(x) + f^4(x) \tag{6}$$

est constante sur $\mathbf{R}$. On note encore H cette constante.

On choisit désormais de considérer le cas où $H>0$, et on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = F\left(H^{-1/4} f(x)\right), \tag{7}$$

où F a été définie à la formule (4).

Question 18 *Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ où f' ne s'annule pas et calculer alors sa dérivée. En déduire qu'il existe une constante $b \in \mathbf{R}$ telle que*

$$f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}\left(H^{1/4}x + b\right) \tag{8}$$

Tournez la page S.V.P.

pour tout $x \in]\alpha, \beta[$.

Question 19 *En déduire que* f' *s'annule au moins une fois sur tout intervalle ouvert de longueur supérieure à* $2\sigma H^{-1/4}$.

Question 20 *Soit* x_0 *une racine de* f', *démontrer que* $f''(x_0) \neq 0$ *et en déduire l'existence de* u_1 *et* u_2, $u_1 < x_0 < u_2$, *tels que* f' *ne s'annule pas sur* $]u_1, x_0[\cup]x_0, u_2[$.

Question 21 *Démontrer l'existence de* $x_1 = \inf\{x > x_0 \,|\, f'(x) = 0\}$. *Montrer que* $x_1 > x_0$ *et* $f'(x_1) = 0$. *En déduire la valeur de* $x_1 - x_0$.

Question 22 *De même on pose* $x_{-1} = \sup\{x < x_0 \,|\, f'(x) = 0\}$. *Montrer que* f *vérifie* (8) *pour tout* $x \in]x_{-1}, x_1[$, *puis sur* $\mathbf{R}$ *tout entier.*

4 Le calcul trigonométrique généralisé

La fonction cl est définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\mathrm{cl}(x) = \frac{\mathrm{sl}'(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)}. \tag{9}$$

Question 23 *Montrer que pour tout* x *réel on a*

$$\mathrm{sl}^2(x) + \mathrm{cl}^2(x) = 1 - \mathrm{sl}^2(x)\,\mathrm{cl}^2(x). \tag{10}$$

Question 24 *Calculer la fonction dérivée* cl' *de la fonction* cl *et en déduire que* cl *vérifie l'équation différentielle* (5).

Question 25 *Montrer que pour tout* x *réel on a*

$$\mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}(\sigma - x). \tag{11}$$

On définit la fonction G sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ par

$$G(x, y) = \frac{\mathrm{sl}(x)\,\mathrm{sl}'(y) + \mathrm{sl}(y)\,\mathrm{sl}'(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)\,\mathrm{sl}^2(y)}.$$

Question 26 *Montrer que* G *vérifie l'équation*

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} \;;$$

en déduire que pour tout a *dans* $\mathbf{R}$, G *est constante le long de la droite d'équation* $x + y = a$.

Question 27 *Montrer que*

$$\mathrm{sl}(x + y) = G(x, y).$$

et en déduire une formule d'addition pour la fonction sl, *c'est-à-dire une expression de* $\mathrm{sl}(x + y)$ *ne faisant intervenir que* $\mathrm{sl}(x)$, $\mathrm{sl}(y)$, $\mathrm{cl}(x)$ *et* $\mathrm{cl}(y)$.

Question 28 *Démontrer la formule de Fagnano, valable dans un intervalle* $[-\alpha, \alpha]$ *que l'on précisera :*

$$2\int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}. \tag{12}$$

Fin de l'épreuve

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Séries entières
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Dérivabilité et convexité
- Séries numériques et vectorielles
- Limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/pc