Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2014, filière PC

Mathématiques 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- 1 L'opérateur de moyenne
- 2 Le cas périodique : périodes commensurables
- Périodes incommensurables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/pc/2014/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2014 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Opérateur de moyenne

Notations

On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbf{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbf{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbf{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

On note $\mathscr{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, $\mathscr{C}_b^0$ l'ensemble des fonctions bornées appartenant à $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}_+^{0*}$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathscr{C}^0$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

On note $\|\cdot\|$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}_b^0$: si f est continue et bornée sur $\mathbf{R}$, $\left\|f\right\| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|f\left(x\right)\right|$.

Dans tout le problème la fonction f est un élément de $\mathscr{C}^0$ et la fonction ω un élément de $\mathscr{C}_+^{0*}$.

1 L'opérateur de moyenne

Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on pose

$$\varphi_\omega(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Question 1 *Montrer que la formule* (1) *définit une fonction φ_ω continue sur $\mathbf{R}^*$ et qu'elle se prolonge continûment à $\mathbf{R}$. Déterminer* $\lim_{x\to 0} \varphi_\omega(x)$.

On notera encore φ_ω ce prolongement.

On note A_ω l'application qui à f fait correspondre φ_ω.

Question 2 *Montrer que A_ω définit un endomorphisme de $\mathscr{C}^0$; est-ce également un endomorphisme de $\mathscr{C}_b^0$?*

Question 3 *Démontrer que A_ω est injectif.*

On dit que λ est une valeur propre de A_ω sur $\mathscr{C}_b^0$, s'il existe $u \in \mathscr{C}_b^0$ non identiquement nulle telle que $A_\omega(u) = \lambda u$. La fonction u est alors un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Question 4 *Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la restrictions à* $\mathbf{R}_+^*$ *d'un vecteur propre u de* A_ω.

Question 5 *Résoudre cette équation différentielle dans* $\mathbf{R}_+^*$. *Montrer que sa solution ne peut se prolonger par continuité en* 0 *que si* $\lambda \in]0,1]$.

Question 6 *Dans le cas où* ω *est intégrable sur* $\mathbf{R}^+$ *déterminer l'ensemble des valeurs propres de* A_ω *et les sous-espaces propres associés (on pourra distinguer le cas* $\lambda = 1$*).*

2 Le cas périodique

On suppose désormais que ω **est** τ**-périodique et que** f **est** T**-périodique, où** τ **et** T **sont des réels strictement positifs**.

Question 7 *Montrer que* $\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $x \to +\infty$.

Question 8 *Montrer que* ω *admet un maximum et un minimum strictement positifs.*

Périodes commensurables

On suppose dans ce paragraphe que τ/T est rationnel.

Question 9 *Déterminer* $\theta > 0$ *tel que pour tout* x,

$$\omega(x+\theta) = \omega(x) \text{ et } f(x+\theta) = f(x).$$

On note E l'application partie entière de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Z}$, et pour $\theta \in \mathbf{R}_+^*$,

$$E_\theta(x) = \theta E(x/\theta), \text{ où } x \in \mathbf{R}.$$

Question 10 *Représenter graphiquement la fonction* E_θ *pour* $-2\theta \leq x \leq 3\theta$.

Question 11 *Déterminer* $A_\omega(f) \circ E_\theta$ *sur* $[k\theta, (k+1)\theta[$ *où* $k \in \mathbf{Z}^*$. *Démontrer que*

$$\left(A_\omega(f) \circ E_\theta\right)(x) = A_\omega(f)(\theta)$$

pour $x \in [0, \theta[$.

Question 12 *Montrer que* $\left|\int_{E_\theta(x)}^x f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \theta \left\|f\right\| \|\omega\|$.

Question 13 *Démontrer que, pour* $x \in \mathbf{R}_+^*$

$$\left|\left(A_\omega(f) - A_\omega(f) \circ E_\theta\right)(x)\right| \leq \frac{\theta \left\|f\right\| \|\omega\|}{x \min \omega}\left(\frac{\|\omega\|}{\min \omega} + 1\right).$$

Question 14 *En déduire que* $A_\omega(f) \in \mathscr{C}^0$ *et possède une limite lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *et en donner une expression. Qu'en est-il lorsque* x *tend vers* $-\infty$?

Périodes incommensurables

On suppose dans ce paragraphe que τ/T est irrationnel.

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{Z}_N = \{n \in \mathbf{Z} \,|-N \leq n \leq N\}$.

Question 15 *Pour $n \in \mathbf{Z}_N \setminus \{0\}$, on pose $S_n(\tau, T) = \{|mT + n\tau| \text{ où } m \in \mathbf{Z}\}$. Démontrer que $S_n(\tau, T)$ admet un minimum non nul.*

Question 16 *On pose $S(N, \tau, T) = \left\{|mT + n\tau| \text{ où } m \in \mathbf{Z},\, n \in \mathbf{Z}_N \setminus \{0\}\right\}$. Démontrer que $S(N, \tau, T)$ admet un minimum non nul.*

On suppose à présent que ω est non seulement continue, mais de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux

Question 17 *Démontrer qu'il existe des nombres complexes γ_m, où $m \in \mathbf{Z}$, tels que $\sum_{m\in\mathbf{Z}} \left|\gamma_m\right|$ converge et tels que pour tout $n \in \mathbf{Z}$,*

$$\int_0^x \omega(t)\, e^{2i\pi nt/T} \mathrm{d}t = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \gamma_m \int_0^x e^{2i\pi t(n/T+m/\tau)} \mathrm{d}t.$$

Question 18 *Soit $p(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{2i\pi nt/T}$, où les c_n appartiennent à $\mathbf{C}$, montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$*

$$\left| A_\omega\big(p\big)(x) - \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{K}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On rappelle le théorème de Weierstrass trigonométrique : pour toute fonction f continue, T-périodique et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p, soit

$$p(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}_N} c_n e^{2i\pi nt/T} \text{ où } c_n \in \mathbf{C},$$

tel que $\left\|f - p\right\| \leq \varepsilon/3$.

Question 19 *En déduire que $A_\omega\big(f\big)(x)$ tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$, et en donner une expression.*

Fin de l'épreuve

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Limites et continuité
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Suites et séries de fonctions
- Nombres complexes et trigonométrie
- Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/pc