Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2021, filière PC

Physique 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- I La nature de GRS 1915+105
- II La nature de l'astre central
- III Éjection par l'astre central

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/pc/2021/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2021 – PHYSIQUE II PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Enquête autour de la source Grs 1915+105

La source de lumière astronomique Grs 1915+105 a été découverte en 1992 par le satellite franco-russe GRANAT. Elle est située dans notre galaxie. Dans le système de coordonnées équatoriales célestes, son ascension droite est de 19h 15min 11,6s et sa déclinaison est de $+10°$ $56'$ $44''$. Ses coordonnées astronomiques sont à l'origine de son nom. Sa distance à la Terre a été évaluée à environ 12 kpc.

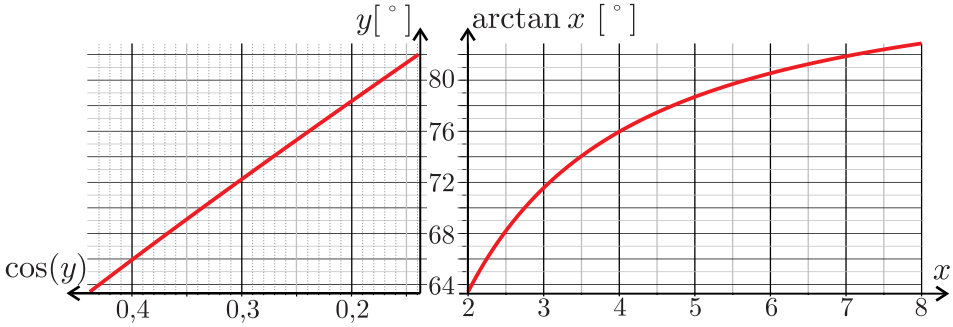
Grs 1915+105 fut ensuite observée en 1994 avec le radio-télescope *Very Large Array* pendant une durée de quelques semaines qui permit d'établir avec certitude que Grs 1915+105 était le premier objet galactique exhibant le phénomène de jets dits « superluminiques ».

Ces différentes observations ont permis de déterminer la nature et les caractéristiques de cet objet qui est devenu le représentant emblématique de la famille des micro-quasars. Ce sujet reprend le fil de cette enquête autour de Grs 1915+105 et propose une explication du phénomène de jet superluminique.

Pour les applications numériques on prendra :

- Masse du Soleil : $M_\odot \simeq 2{,}0 \times 10^{30}\,\text{kg}$
- Rayon du Soleil : $R_\odot \simeq 7{,}0 \times 10^{5}\,\text{km}$
- Luminosité du Soleil : $L_\odot \simeq 4{,}0 \times 10^{26}\,\text{W}$
- Constante de la gravitation : $G \simeq 7{,}0 \times 10^{-11}\,\text{SI}$
- Vitesse de la lumière $c \simeq 3{,}0 \times 10^{5}\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}70 \qquad 1{,}4^3 \simeq \dfrac{11}{4} \qquad 3\pi \simeq 10$

L'unité astronomique (ua) est la distance moyenne entre la Terre et le Soleil : $1\,\text{ua} \simeq 2{,}0\times10^{11}\,\text{m}$. Le parsec (pc) est la distance à laquelle il faut se mettre du couple Terre-Soleil pour les voir séparés d'une seconde d'arc ($1''$) : $1\,\text{pc} \simeq 3{,}0 \times 10^{16}\,\text{m}$



L'objectif de cette enquête est de déterminer les caractéristiques physiques de l'objet Grs 1915+105. Une attention particulière sera donc portée aux résultats numériques qui seront, sauf indication particulière, donnés avec deux chiffres significatifs. Les vecteurs seront repérés par une flèche ($\vec{v}$) sauf dans le cas unitaire où ils seront surmontés d'un chapeau ($\|\widehat{e}_x\| = 1$). Cinq documents complémentaires sont fournis à la fin du sujet et seront discutés au fil des questions. L'indice $\odot$ fait référence au Soleil.

I La nature de Grs 1915+105

❑ – **1**. A l'aide du document 1, indiquer dans quelle constellation se trouve Grs 1915+105. Avec un seul chiffre significatif, quelle est sa distance à la Terre en années-lumière ?

I.A Une étoile normale ?

Hypothèse 1
La source Grs 1915+105 est une étoile « ordinaire », c'est-à-dire une étoile comme le Soleil, qui puise son énergie dans la fusion nucléaire.

On considère une onde plane monochromatique, de fréquence ν, se propageant dans le vide selon $\widehat{e}_x$. Son champ électrique est noté $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\widehat{e}_y$. On appelle éclairement $\mathcal{E}$ la puissance moyenne transportée par l'onde par unité de surface perpendiculaire à sa direction de propagation.

❑ − **2**. Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de ϵ_0, c et E_0.

On considère à présent cette onde comme un faisceau de photons se propageant selon $\widehat{e}_r$. Ce faisceau de photons arrive perpendiculairement sur une paroi plane d'aire S.

❑ − **3**. Rappeler l'expression de l'énergie transportée par un photon puis exprimer le nombre de photons qui arrivent sur la paroi entre t et $t + \mathrm{d}t$, en fonction de $\mathcal{E}$, ν, S, $\mathrm{d}t$ et de la constante de Planck h.

On suppose que la paroi absorbe totalement le rayonnement. Quelle est l'expression de la quantité de mouvement d'un photon d'après la relation de de Broglie ?

Exprimer la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon–paroi puis en déduire la force subie par la paroi de la part de l'ensemble des photons incidents.

On modélise une étoile par une sphère de rayon R, dont le noyau de masse M, supposé ponctuel, émet des photons qui se propagent vers la surface. On note L la luminosité ou puissance totale rayonnée par l'étoile.
On considère un élément de matière de masse $m \ll M$, situé à la surface de l'étoile, d'épaisseur négligeable et présentant une surface S perpendiculaire à la direction radiale (cf. figure 1).

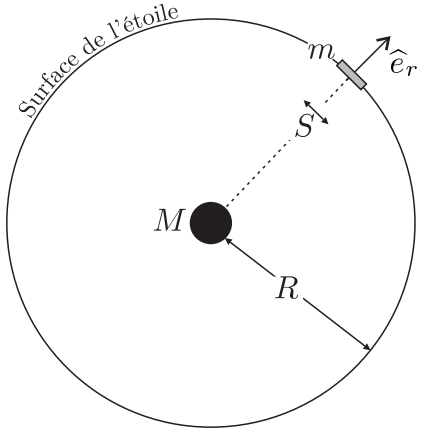


FIGURE 1 – Modélisation

❑ − **4**. Exprimer la force de radiation exercée par les photons sur l'élément de matière en fonction de S, L, R et c.

La limite d'Eddington, notée L_{Edd}, est une valeur de luminosité qu'une étoile ne peut pas dépasser. Au delà, la force de radiation prend le pas sur celle de gravitation et des constituants de l'étoile peuvent être éjectés.

❑ − **5**. Exprimer, notamment en fonction du rapport m/S, la luminosité maximale L_{Edd} permettant un équilibre entre force radiative et force gravitationnelle.

❑ − **6**. Le rapport m/S est une constante indépendante des paramètres de l'étoile. En prenant $m/S = 25\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}$, exprimer la limite d'Eddington sous la forme $L_{\mathrm{Edd}} = K_1 \dfrac{M}{M_\odot} L_\odot$ où K_1 est un facteur que l'on déterminera et dont on précisera la valeur numérique. La luminosité de GRS 1915+105 étant $L = 2 \times 10^6\, L_\odot$, en déduire la valeur de la masse minimale de GRS 1915+105, exprimée en masses solaires.

Des étoiles avec de telles masses existent, ce sont des géantes bleues. Elles sont en moyenne 15 fois plus grosses que le Soleil.

❑ − **7**. En utilisant le document 2, déterminer la plus petite échelle de variabilité temporelle de GRS 1915+105. En déduire le rayon maximum de cet objet, en supposant qu'il respecte la limite de causalité. Comparer avec le rayon moyen d'une géante bleue et conclure.

I.B Un objet compact ?

Hypothèse 2
La source GRS 1915+105 est un objet très compact (trou noir ou étoile à neutrons) en orbite avec une étoile ordinaire dont il arrache de la masse par accrétion.

❑ – **8**. Exprimer la variation d'énergie potentielle causée par l'accrétion d'un élément de masse m, initialement situé à très grande distance de l'objet compact, vers la surface de cet objet compact de rayon R. Donner ΔE_p sous la forme $\Delta E_p = K_2\ mc^2$, K_2 étant une constante à déterminer en fonction notamment des caractéristiques de l'objet compact.

Déterminer la valeur numérique de cette constante dans le cas du Soleil et dans celui d'un objet compact de masse $2M_\odot$ et de rayon 20 km. Commenter, sachant que le processus de fusion nucléaire, responsable de la production d'énergie dans les étoiles « normales », représente environ $0{,}07mc^2$ (voir document 3).

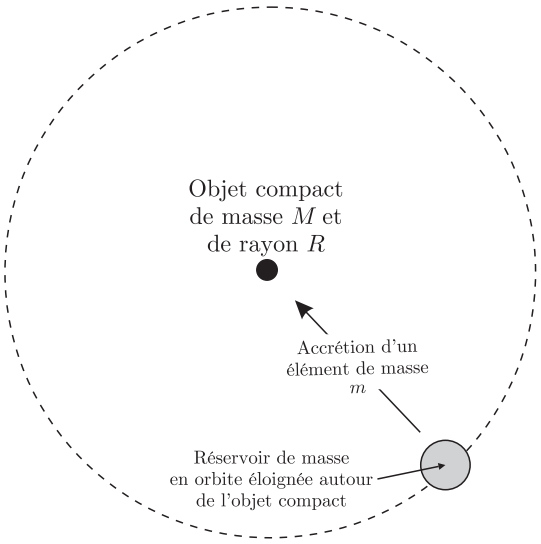


FIGURE 2 – Accrétion de masse

Pour un trou noir, le rayon de Schwarzschild, noté R_s, correspond à la distance en deçà de laquelle aucun objet (y compris un photon) ne peut échapper à l'attraction gravitationnelle de l'astre.

❑ – **9**. Exprimer l'énergie mécanique d'un objet ponctuel de masse m, de vitesse v, subissant une force d'attraction gravitationnelle de la part d'un astre de masse M supposé ponctuel et situé à la distance r.

A quelle condition cet objet est-il dans un état de diffusion ?

En déduire l'expression de la vitesse de libération de l'objet en fonction de sa distance à l'astre attracteur.

En considérant que l'on peut généraliser ce calcul classique aux photons, exprimer le rayon de Schwarzschild de l'astre attracteur en fonction de M, G et c.

❑ – **10**. Un calcul relativiste rigoureux conduit à estimer le rayon de la dernière orbite stable d'une particule gravitant autour du trou noir à $R_o = 3R_s$. Quelle est alors la plus petite échelle de temps de variabilité attendue pour un trou noir de 100 masses solaires ? Conclure.

II La nature de l'astre central

On admet dans cette partie que le système GRS 1915+105 est constitué d'un objet compact, noté S_0 de masse M, autour duquel gravite une étoile ordinaire que nous appellerons « compagnon » et qui sera notée S_1 de masse m. Ces deux objets seront supposés ponctuels. On cherche ici à estimer la masse de l'objet compact, ce qui permettra de trancher sur sa nature : trou noir ou étoile à neutrons. Le référentiel d'étude $\mathscr{R}_O$ centré sur un point O est galiléen. On suppose que les seules interactions entre l'objet compact et son compagnon sont gravitationnelles.

❑ – **11**. Ecrire les équations différentielles vérifiées par les vecteurs $\overrightarrow{OS_0}$ et $\overrightarrow{OS_1}$. En déduire que le référentiel $\mathscr{R}_K$ centré sur le point K tel que $(M+m)\,\overrightarrow{OK} = M\,\overrightarrow{OS_0} + m\,\overrightarrow{OS_1}$ est galiléen. Sous quelle hypothèse le référentiel $\mathscr{R}$, centré sur S_0, peut-il être supposé galiléen ? On fera cette hypothèse. Montrer alors que le mouvement de S_1 dans $\mathscr{R}$ s'effectue dans un plan $\mathscr{P}$.

On considère une source ponctuelle S se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\widehat{e}_x$ le long d'un axe $\mathscr{A} = (A, \widehat{e}_x)$. Un détecteur D supposé immobile est placé hors de l'axe $\mathscr{A}$. La source S émet des ondes de période T se propageant à la vitesse c. On note d_1 la distance entre S et D à l'instant t_0 et d_2 cette distance à l'instant $t_0 + T$. On note θ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{\text{SD}}$ à t_0 et la direction du vecteur $\vec{v}$.

❑ – **12**. Faire un schéma de la situation. Exprimer la période T' perçue par le détecteur en fonction de T, d_1, d_2 et c. En supposant que $vT \ll d_1$ et $v \ll c$, en déduire l'expression de la fréquence f' perçue par le détecteur en fonction de la fréquence d'émission f, de v, θ et c. Comment se nomme ce phénomène ?

Dans le spectre de l'étoile compagnon, les fréquences des raies varient à cause du mouvement du compagnon autour de l'astre central. On peut alors en déduire une mesure de la vitesse du compagnon, projetée sur l'axe de visée. Pour simplifier, on suppose que la trajectoire du compagnon est circulaire, parcourue avec une vitesse uniforme v.

On considère un premier cas représenté par la figure 3 ci-contre dans lequel l'observateur fixe se trouve « à l'infini » dans le plan orbital $\mathscr{P}$ du compagnon autour de l'objet compact. On note $\vec{v}_p$ la vitesse du compagnon projetée sur la ligne de visée et v_p son intensité.

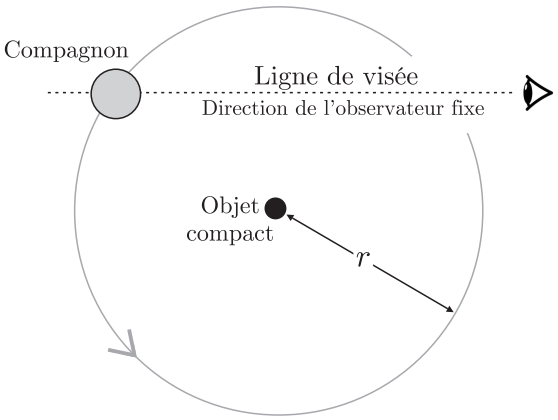


FIGURE 3 – Schématisation

❑ – **13**. Reproduire et compléter le schéma en indiquant par des flèches la vitesse $\vec{v}$ et sa projection $\vec{v}_p$ pour une position quelconque du compagnon.

Quelles sont les extrema de v_p ?

Indiquer les positions du compagnon correspondant aux extrema de v_p.

A quel moment peut-on mesurer v ?

En fait la ligne de visée n'est pas forcément contenue dans $\mathscr{P}$. On définit alors le plan du ciel, noté $\mathscr{C}$, orthogonal à l'axe de visée qui est matérialisé par la droite passant par l'observateur et l'objet compact. On note i l'angle d'inclinaison supposé constant entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$. Ces divers objets géométriques sont représentés sur la figure 4.

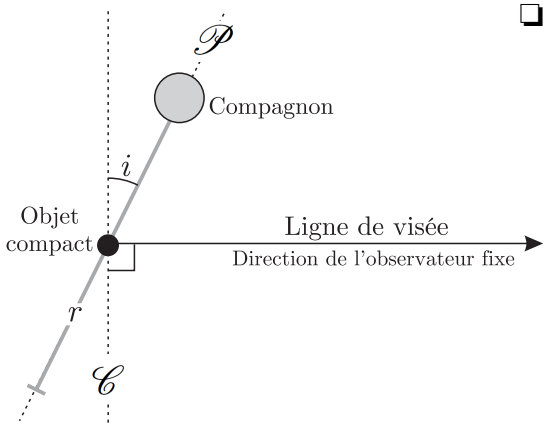


FIGURE 4 – Plan du ciel et plan orbital

❑ – **14**. Déterminer les deux valeurs de l'angle i correspondant à la plus petite et la plus grande valeur de la vitesse projetée v_p mesurée.

Pour un angle i quelconque, on définit les positions extrêmes du compagnon, où v_p est maximale. Quelle est alors la relation entre $v_{p,\max}$, v et i ?

Interpréter la courbe tracée dans le document 4 et proposer une valeur pour $v_{p,\max}$ accompagnée d'une incertitude.

❑ – **15**. On cherche à présent à relier la vitesse du compagnon aux caractéristiques de son orbite. Retrouver la troisième loi de Kepler en appliquant le principe fondamental de la dynamique au compagnon, dont l'orbite circulaire de rayon r a une période P autour de l'objet compact de masse M.

En se basant sur le document 4, on peut définir une fonction g dite « fonction de masse » ne dépendant que de M et i et telle que $g(M,i) = \dfrac{Pv_{p,\max}^3}{2\pi G}$.

❑ – **16**. Exprimer $g(M,i)$ en fonction de M et i.

Calculer numériquement la valeur de g (en masses solaires) et en déduire une masse minimale pour l'objet compact central de GRS 1915+105.

En déduire la nature de l'objet compact accrétant de GRS 1915+105.

III Ejection par l'astre central

Lors d'une campagne d'observation réalisée au printemps 1994, les astronomes Félix Mirabel et Luis Rodríguez ont pu constater que l'objet central de GRS 1915+105 a éjecté de la matière dans deux directions opposées. Ces éjectas ont été détectés grâce à la « lumière » qu'ils ont émise dans le domaine des ondes radio. Le document 5 montre des « clichés » de ces éjectas à quelques jours d'intervalle et permet de repérer leur position par rapport à la source centrale.

❑ – **17**. Donner un ordre de grandeur des fréquences correspondant aux ondes radio.

❑ – **18**. Sur la figure du document 5, pourquoi peut-on affirmer sans calcul que la vitesse angulaire apparente des deux éjectas est uniforme ? On fera cette hypothèse dans toute la suite. A partir des deux données extrêmes, exprimer (sous forme d'une fraction que l'on ne simplifiera pas) sa valeur en seconde d'arc par jour pour chaque ejecta.

Par des mesures indépendantes, on a pu déterminer que GRS 1915+105 est situé à 12 kpc de la Terre. En utilisant la définition du parsec, déduire la vitesse des deux éjectas en $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Commenter.

Pour interpréter ce résultat, on fait les hypothèses suivantes (éjectas polaires symétriques) :

• On suppose que l'axe d'éjection est perpendiculaire au plan orbital ;

• On suppose que les deux éjectas sont émis par la source centrale au même instant $t = 0$ et se déplacent avec des vitesses opposées de norme v_e constante.

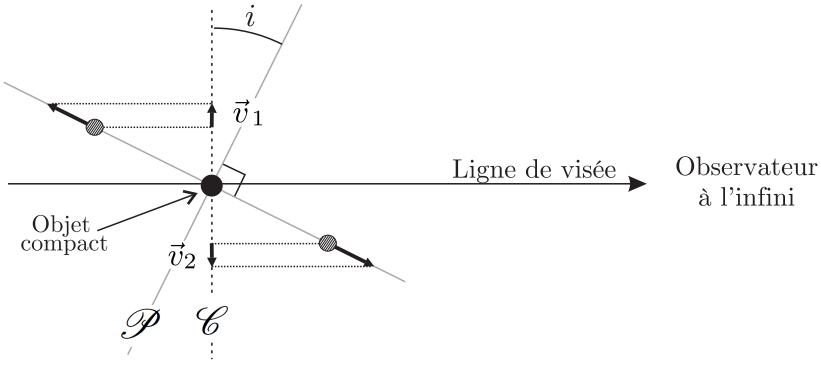


FIGURE 5 – Géométrie d'une éjection polaire symétrique

❑ – **19**. Exprimer la distance $R(t)$ entre la source centrale et chaque éjecta à la date t, en déduire le déplacement apparent sur le plan du ciel de chaque éjecta.

Si chaque éjecta émet de la lumière à l'instant t, à quelles dates t_1 et t_2 les photons correspondants seront-ils reçus par un observateur situé sur la Terre à la distance D ?

En déduire l'expression des normes des vitesses apparentes v_1 et v_2 des deux éjectas (voir figure 5).

❏ – **20**. On étudie en particulier la fonction $v_1(i)$. Quelle relation doit vérifier l'angle i pour que $v_1(i)$ soit maximale ? Que vaut alors la vitesse maximale $v_{1,\max}$ de $v_1(i)$? On introduira le facteur de Lorentz $\gamma = \left[1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2\right]^{-1/2}$.

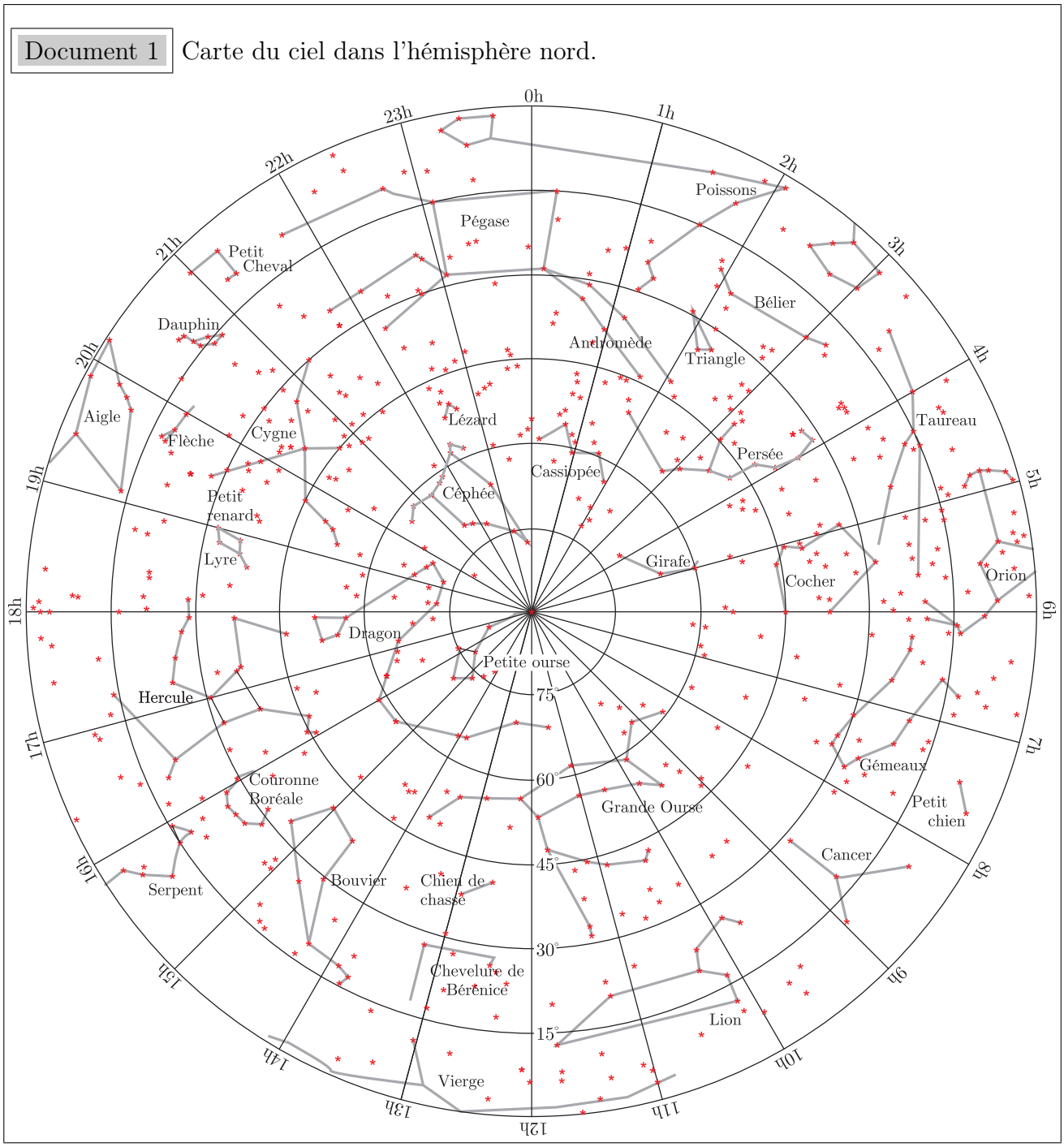
A quelle condition sur v_e le mouvement *apparent* des éjectas est-il plus rapide que celui de la lumière ?

❏ – **21**. Exprimer $\tan i$ en fonction de c, v_1 et v_2 puis v_e en fonction de c, v_1, v_2 et $\cos i$.

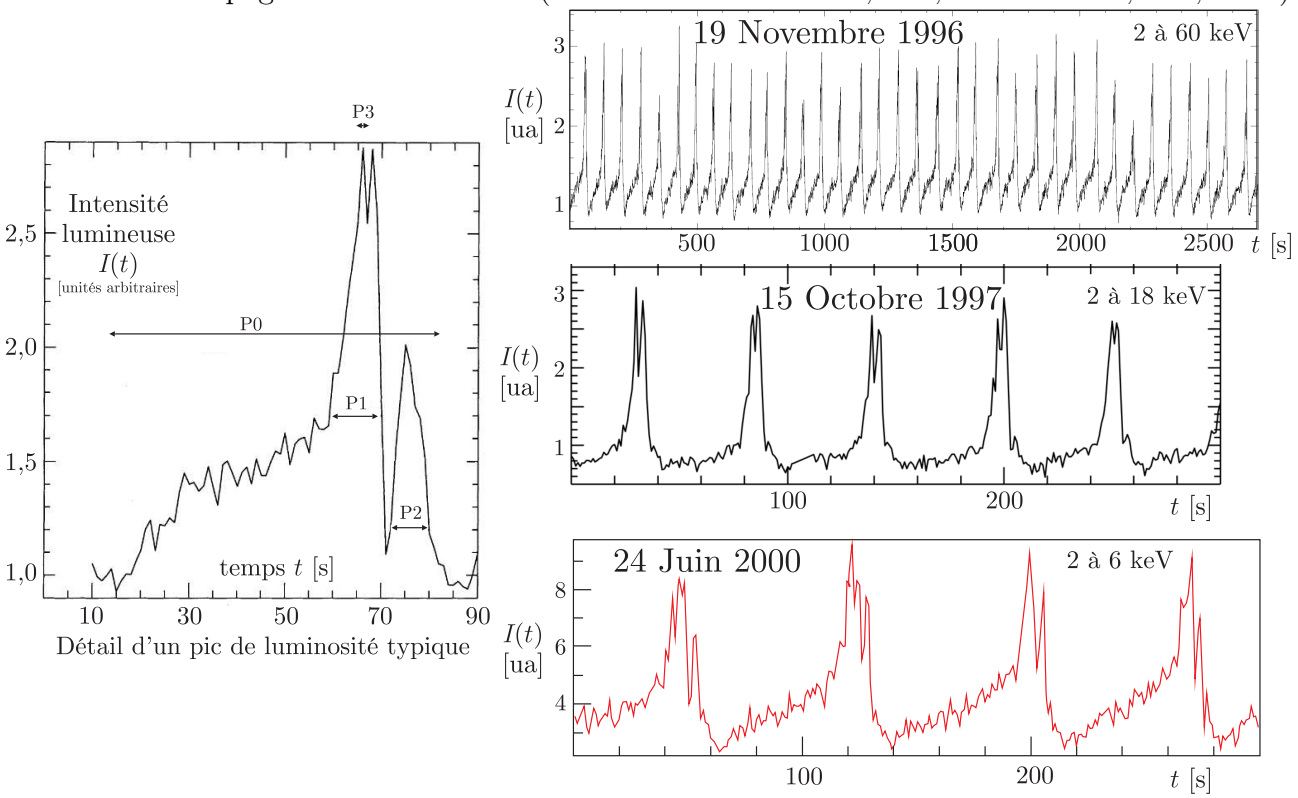
A l'aide des valeurs trouvées à la question **18**, déterminer les valeurs numériques de i et v_e. Commenter la valeur de v_e.

❏ – **22**. A partir de tous les résultats obtenus estimer la valeur numérique de la masse de l'objet compact situé au cœur de GRS 1915+105.

Document 1 Carte du ciel dans l'hémisphère nord.



Document 2 Courbes de lumière de GRS 1915+105 dans le domaine des rayons X lors de diverses campagnes d'observations (tirées de MNRAS **330**, 487, 2002 et **324**, 267, 2001)



On note clairement le caractère variable et périodique de la source à différentes échelles de temps. Chaque période est constituée d'un pic caractéristique d'une durée de l'ordre de P0. Chaque pic montre des évènements d'une durée maximale de l'ordre de P1 ou P2, eux-mêmes décomposés en sursauts d'une durée de l'ordre de P3. Ces pics sont périodiques et une analyse en fréquence sur de longues périodes a permis de montrer que la fréquence associée aux sursauts est de l'ordre de $f_3 \simeq 10$ Hz. La variabilité temporelle Δt d'une source lumineuse astronomique correspond à la plus petite durée sur laquelle elle varie de façon périodique. Elle donne une limite sur sa taille caractéristique R. La vitesse de propagation d'un processus physique étant limitée par la vitesse de la lumière, on a toujours $R < c\Delta t$: on parle de limite de causalité.

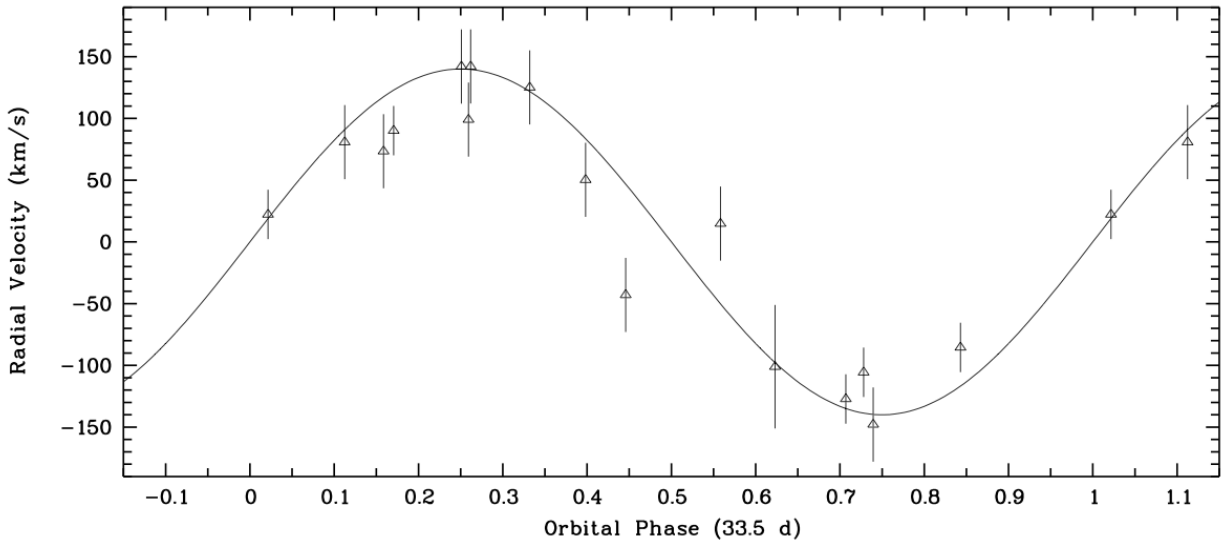
Document 3 : Evolution stellaire et caractéristiques des objets compacts.

En astrophysique, un objet compact est généralement le cadavre d'une étoile. Pendant leur phase active les étoiles sont dites « normales », elles équilibrent leur pression gravitationnelle en réalisant la fusion thermonucléaire d'éléments de plus en plus lourds. Les étoiles les plus légères ne peuvent aller plus loin que la fusion de l'hélium en carbone. Leur cadavre est alors une naine blanche dont la masse ne peut excéder $1{,}5\,M_\odot$. Certaines étoiles plus massives peuvent aller jusqu'à la synthèse du fer et terminent généralement en étoile à neutrons dont la masse ne peut excéder $3\,M_\odot$. En fin de cycle, les étoiles très massives ne peuvent plus contrebalancer la gravitation et s'effondrent en un trou noir.

Naine blanche	**Etoile à neutrons**	**Trou noir**
$R \sim 7000$ km $\rho \sim 1$ tonne $\cdot$ cm^{-3} $M < 1{,}5\,M_\odot$	$R \sim 10$ km $\rho \sim 10^9$ tonne $\cdot$ cm^{-3} $M < 3\,M_\odot$	$R \sim 3$ km pour $M \sim M_\odot$ Pas de limite en masse

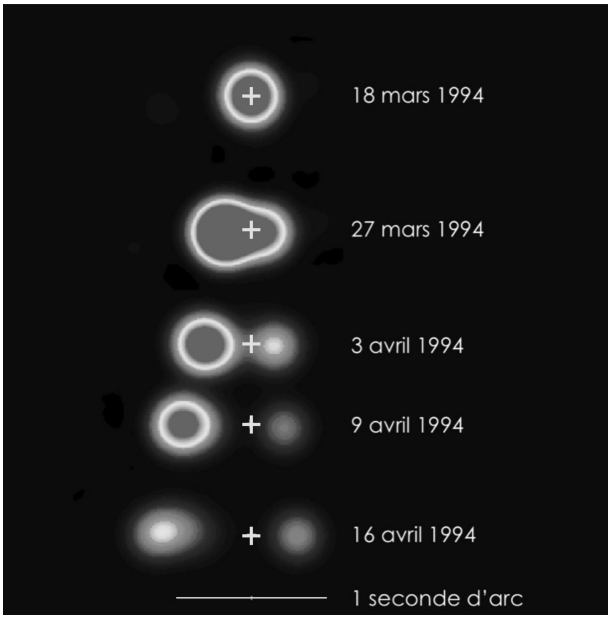
Document 4

Phasogramme du compagnon de GRS 1915+105. La vitesse projetée est tracée en fonction de la phase orbitale, qui varie de 0 à 1 lors d'une période de révolution. La période mesurée vaut 33,5 jours soit $2{,}8 \times 10^6$ secondes.



Document 5

Position au cours du temps de deux jets de matière émis par l'astre central de GRS 1915+105. La distance verticale entre les images est proportionnelle à la durée séparant les observations. La source centrale est repérée par une croix et est considérée comme fixe. Les deux éjectas sont initialement confondus avec la source centrale, dont ils s'éloignent peu à peu. Le tableau sur la droite donne les distances angulaires entre chaque éjecta et la source centrale.



Date	Dist. éjecta 1	Dist. éjecta 2
18 mars	0"	0"
27 mars	0,15"	0,08"
3 avril	0,28"	0,15"
9 avril	0,36"	0,19"
16 avril	0,50"	0,26"

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Description et paramétrage du mouvement d'un point

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/pc