Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2000, filière PSI

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie préliminaire et première partie : l'espace M et le groupe G
- Deuxième partie : l'endomorphisme l_g de l'espace V des matrices symétriques

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2000/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE PSI
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - PSI.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude d'endomorphismes définis par l'action d'un groupe sur un espace vectoriel de matrices complexes.

Soit M l'ensemble des matrices complexes m d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$m = \begin{pmatrix} a & i\,b \\ i\,\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Dans cette relation, a et b sont des nombres complexes, i vérifie $i^2 = -1$, $\overline{a}$ (resp. $\overline{b}$) est le nombre complexe conjugué de a (resp. b).

Partie préliminaire

0. **L'ensemble M est un espace vectoriel réel** :

Démontrer qu'en munissant l'ensemble M de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un réel, l'ensemble M est un espace vectoriel réel. Préciser sa dimension.

Démontrer que le produit de deux matrices m_1 et m_2 de l'espace M appartient à M.

Soit I la matrice unité d'ordre 2. Soit m une matrice appartenant à l'espace vectoriel M ; la matrice transposée de la matrice m est notée ${}^t m$. Si p est un entier naturel, m^p est le produit de la matrice m p-fois par elle-même ; classiquement $m^0 = I$.

Soit G le sous-ensemble des matrices g appartenant à l'espace M dont le déterminant est égal à 1 :

$$G = \{g \in M \mid \det g = 1\}.$$

Il est admis que l'ensemble G est, pour le produit des matrices, un groupe.

Soit U le sous-ensemble des matrices u de l'espace M antisymétriques dont le carré est égal à l'opposé de la matrice identité :

$$U = \left\{u \in M \mid u + {}^t u = 0,\ u^2 = -I\right\}.$$

Soit V le sous-ensemble des matrices symétriques v appartenant à l'espace M :

$$V = \{v \in M \mid v = {}^t v\}.$$

Il est admis que le sous-ensemble V de M est un sous-espace vectoriel réel.

Soient m_1 et m_2 deux matrices appartenant à l'espace vectoriel M ; il est admis que la trace de la matrice $\overline{m}_1.{}^t m_2$ est réelle ; soit $(m_1 \mid m_2)$ le réel défini par la relation suivante :

$$(m_1 \mid m_2) = \frac{1}{2} Tr(\overline{m}_1.{}^t m_2) = \frac{1}{2} Tr(m_1.{}^t \overline{m}_2).$$

L'égalité entre les traces des matrices $\overline{m}_1.{}^t m_2$ et $m_1.{}^t \overline{m}_2$ est admise.

Il est admis que l'espace $(M, (. \mid .))$ est un espace euclidien. Si le produit scalaire $(m_1 \mid m_2)$, de deux matrices m_1 et m_2, est nul, ces matrices sont dites perpendiculaires. Le sous-espace vectoriel V de M est un espace euclidien lorsqu'il est muni du produit scalaire induit par celui de M.

Première partie

I.1. Propriétés élémentaires des matrices de l'espace M :

Soit m une matrice de l'espace M ; démontrer que les matrices $m + {}^t\overline{m}$ et $m.{}^t\overline{m}$ s'expriment au moyen de la matrice identité I, du déterminant $\det m$, de la trace Trm de la matrice m.

Soit g une matrice appartenant à M ; déduire du résultat précédent que, pour qu'une matrice g de l'espace M appartienne au groupe G, il faut et il suffit qu'il existe une relation simple entre les matrices g^{-1} et ${}^t\overline{g}$.

Soit m une matrice de l'espace M dont la trace est nulle $(Trm = 0)$; établir la relation : $m = -{}^t\overline{m}$; calculer les matrices m^2, $({}^t m)^2$ en fonction du déterminant de la matrice m et de la matrice unité I.

I.2 Matrices u :

Déterminer les matrices u qui appartiennent à l'ensemble U défini ci-dessus.

Soit m une matrice de l'espace M, u une matrice de l'ensemble U. Comparer les deux produits de matrices : $m.u$ et $u.\overline{m}$. Démontrer que, lorsque la trace de la matrice m est nulle $(Trm = 0)$, les deux matrices $m.u$ et $u.m$ appartiennent au sous-espace vectoriel V.

I.3. Norme d'une matrice m :

Soit m une matrice de l'espace M ; calculer la norme de la matrice m $\left(\| m \| = \sqrt{(m \mid m)}\right)$ en fonction du déterminant de cette matrice. Comparer pour deux matrices m et w de l'espace M la norme $\| m.w \|$ du produit des matrices m et w avec le produit $\| m \| . \| w \|$ des normes de ces matrices.

I.4. Matrices appartenant à G :

a. Démontrer que toute matrice g appartenant au groupe G s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$g = I\ \cos\theta + m,$$

où θ est un réel appartenant au segment $[0, \pi]$ et m une matrice de trace nulle ($Trm = 0$) qui appartient à M.

Calculer, en fonction du réel θ, le déterminant de la matrice m, ainsi définie à partir de la matrice g, ainsi que le carré m^2 de la matrice m.

b. Soit m une matrice de l'espace M différente de 0 ($m \neq 0$) : démontrer que la matrice g_1 définie par la relation ci-dessous appartient au groupe G :

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m.$$

I-5 Un sous-groupe de G :

Soit g_1 une matrice de trace nulle ($Trg_1 = 0$) appartenant à G ; soit $G(g_1)$ l'ensemble des matrices m_θ définies par la relation suivante

$$m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta,$$

où θ un réel quelconque appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit :

$$G(g_1) = \left\{ m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta \ \mid\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Démontrer que l'ensemble $G(g_1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe G.

Deuxième partie

Cette partie est consacrée à l'étude d'une application définie dans le sous-espace vectoriel V des matrices symétriques de M à l'aide d'une matrice du groupe G.

Dans toute cette partie, g est une matrice donnée du groupe G, de trace nulle ($Trg = 0$) ; étant donnée une matrice w appartenant au sous-espace vectoriel V soit $l_g(w)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$l_g(w) = g.w + w.{}^t g.$$

II-1. **L'endomorphisme** l_g **de** V :

a. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel réel V de l'espace vectoriel M. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

b. Démontrer que l'application $l_g : w \mapsto l_g(w)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V. Démontrer que cet endomorphisme l_g n'est pas nul.

II-2. **Propriétés de l'endomorphisme** l_g :

a. Comparer l'endomorphisme $l_g \circ l_g : w \mapsto l_g(l_g(w))$ à l'endomorphisme $w \mapsto 2g.l_g(w)$. Calculer l'expression $l_g(g.l_g(w))$ en fonction de $l_g(w)$.

Comparer les deux normes $\| l_g(w) \|$ et $\| g.l_g(w) \|$.

Calculer, pour une matrice u de l'ensemble U, l'expression $l_g(g.u)$.

b. Déterminer une relation simple qui lie, pour deux matrices quelconques v et w de l'espace V, les produits scalaires $(l_g(v) \mid w)$ et $(v \mid l_g(w))$.

En déduire l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme l_g.

c. Déduire des résultats précédents, que, pour toute matrice w de V, les matrices $l_g(w)$ et $g.l_g(w)$ sont perpendiculaires.

II-3. **Une base de l'espace** V :

Etant données une matrice v de l'espace vectoriel V telle que son image par l'endomorphisme l_g soit différente de 0 ($l_g(v) \neq 0$), une matrice u de l'ensemble U (u appartient à M, est antisymétrique, $u^2 = -I$), soient h_0 le produit des matrices g et u, h_1 l'image de la matrice v par l'application l_g, h_2 le produit des matrices g et h_1 :

$$h_0 = g.u,\ h_1 = l_g(v),\ h_2 = g.l_g(v).$$

a. Calculer les produits scalaires de la matrice u avec chacune des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2,$ et des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2,$ deux à deux :

$$(u \mid h_i),\ 0 \leq i \leq 2,\ (h_k \mid h_l), 0 \leq k \leq l \leq 2.$$

b. Démontrer que la suite des matrices $h_i,\ 0 \leq i \leq 2,$ est une base de l'espace vectoriel V. Déduire de cette base une base orthonormée. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme l_g dans cette base ? Déterminer la transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\frac{1}{2} l_g$.

II-4. **Un endomorphisme de l'espace vectoriel** M :

Soit θ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit m_θ la matrice appartenant au groupe G (question I-5) définie par la relation suivante :

$$m_\theta = I\cos\theta + g\sin\theta.$$

Soit s_θ l'application qui, à une matrice w de l'espace vectoriel M, associe la matrice $m_\theta.w$.

$$s_\theta : w \mapsto m_\theta.w.$$

Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme s_θ dans la base définie par les matrices $u,\ h_0,\ h_1,\ h_2$.

FIN DU PROBLEME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Structures algébriques usuelles
- Nombres complexes et trigonométrie
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi