Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2004, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Première partie : suites F, G et matrices U_n
- Deuxième partie : sommes et suite auxiliaire
- Troisième partie : séries entières des suites F et G

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2004/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2004 Math PSI 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude de deux suites réelles $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des séries entières de termes généraux $(f_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soient $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies chacune par leurs deux premiers éléments et la même relation de récurrence ci-dessous :

$$\begin{array}{lcll} F & : & f_0 = 0, \quad f_1 = 1, & \text{pour tout entier naturel } n, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \ ; \\ G & : & g_0 = 2, \quad g_1 = 1, & \text{pour tout entier naturel } n, \ g_{n+2} = g_{n+1} + g_n. \end{array}$$

Soit M_2 l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 ; soient I la matrice unité et J la matrice carrée définies par les relations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, soit U_n la matrice définie par la relation suivante :

$$U_n = f_n \ J + \frac{1}{2} g_n I.$$

Soient U la matrice U_1 $\left(U = U_1 = J + \frac{1}{2}I\right)$ et E le sous-espace vectoriel de M_2 engendré par les deux matrices I et J.

Première partie

Le but de cette partie est l'étude alternée des deux suites de réels et de la suite des matrices ; elle permet d'obtenir des résultats préliminaires.

Quelques propriétés :

1. Démontrer que la suite des matrices $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où U^n est la matrice U élevée à la puissance n, (avec la convention habituelle $U^0 = I$), appartient à l'espace vectoriel E.

2. Établir la relation qui, pour tout entier naturel n, lie les matrices U_{n+2}, U_{n+1} et U_n.

Caractérisation de la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$; quelques conséquences :

3. Comparer, pour tout entier p compris entre 0 et 2 $(0 \leq p \leq 2)$ les matrices U_p et U^p. Démontrer qu'il existe, pour tout entier naturel n, une relation simple entre les matrices U_n et U^n.

4. Déduire des deux résultats précédents les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \det U_n = (-1)^n\,, \quad (g_n)^2 - 5\ (f_n)^2 = 4\,(-1)^n\,.$$

5. Étant donnés deux entiers naturels p et q, exprimer les termes f_{p+q} et g_{p+q} des suites F et G en fonction des termes f_p, g_p, f_q et g_q de ces mêmes suites.

Inverse des matrices U_n :

6. Déterminer l'inverse de la matrice U_n en fonction des matrices I et J. Exprimer les coefficients des matrices I et J à l'aide des réels f_n et g_n.

Des polynômes annulés par la matrice U

Soit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P_n(X)$ le polynôme défini par la relation suivante :

$$P_n(X) = X^{\,n} - f_n\ X - f_{n-1}.$$

7. Démontrer que le polynôme $P_n(X)$ est divisible par le polynôme $X^{\,2} - X - 1$.

8. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice U ?

9. Calculer la valeur de la matrice $C_n = U^{\,n} - f_n\ U - f_{n-1} I$.

Divisibilité du polynôme $X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n$ par $X^{\,2} - X - 1$:

Soit toujours n un entier supérieur ou égal à 2 .

10. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice U_n. En déduire la relation suivante :

$$U^{\,2\,n} - g_n\ U^{\,n} + (-1)^n\ \ I = 0.$$

11. Soient Q et R les polynômes obtenus en effectuant la division euclidienne du polynôme $X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n$ par le polynôme $X^{\,2} - X - 1$:

$$X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n = Q(X)\left(X^{\,2} - X - 1\right) + R(X)\,.$$

Préciser les degrés des polynômes Q et R.

Démontrer, en utilisant par exemple les résultats de la question précédente, que le polynôme $X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n$ est divisible par $X^{\,2} - X - 1$.

Deuxième partie

Le but de cette partie est l'étude de propriétés de suites construites à partir des deux suites F et G.

Un calcul de sommes :

12. Le but de cette question est de calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), des expressions plus simples des deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= f_0 + f_2 + \ldots + f_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} f_{2\ k}. \\ \beta_n &= g_0 + g_2 + \ldots + g_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} g_{2\ k}. \end{aligned}$$

Déterminer les expressions de α_n et de β_n en fonction respectivement de f_{2n+1} et de g_{2n+1} en considérant par exemple la matrice S_n définie par la relation suivante :

$$S_n = U_0 + U_2 + \ldots + U_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} U_{2\ k}.$$

Soit T la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\ t_{n+1} + t_n.$$

Détermination des éléments t_n de la suite T à l'aide des réels f_n et g_n.

13. Démontrer que le polynôme $X^{\ 6} - 4\ X^{\ 3} - 1$ est divisible par le polynôme $X^{\ 2} - X - 1$.

14. En déduire que la matrice U vérifie, pour tout entier naturel p, la relation suivante :

$$U^{\ 6+p} = 4\ U^{\ 3+p} + U^{\ p}.$$

15. Déduire de la relation précédente que les termes des suites F et G vérifient, pour tout entier naturel p, les relations suivantes :

$$f_{6+p} = 4\ f_{3+p} + f_p, \quad g_{6+p} = 4\ g_{3+p} + g_p.$$

16. Déduire des résultats précédents l'expression du terme général t_n de la suite T, définie par les relations suivantes :

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\ t_{n+1} + t_n,$$

en fonction de termes des suites F et G.

Troisième partie

Le but de cette partie est l'étude des deux séries entières de termes généraux $a_n = f_n\ x^n$ et $b_n = g_n\ x^n$. Pour tout entier naturel n, soit A_n la matrice définie par la relation suivante :

$$A_n = x^n\ U_n\ .$$

et $\Sigma_n(x)$ la somme des $n+1$ premières matrices A_k :

$$\Sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k\ U_k\ .$$

17. Déterminer pour quelles valeurs du réel x la matrice $I - x\ U$ est inversible et déterminer son inverse sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices I et U.

Il est admis qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel E tend vers 0, lorsque l'entier n croît vers l'infini, si et seulement si tous les termes de la matrice A_n tendent vers 0.

18. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel x pour que la suite de matrices $(x^n\ U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 lorsque l'entier n croît vers l'infini.

19. En déduire, lorsque la condition obtenue sur le réel x est réalisée, la limite de la suite de matrices $(\Sigma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

20. À partir des résultats précédents, déterminer un minorant ρ des rayons de convergence des deux séries entières de termes généraux $(\ f_n\ x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n\ x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les sommes $A(x)$ et $B(x)$ de ces deux séries :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ x^n \quad ; \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\ x^n.$$

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Suites récurrentes
- Séries entières
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi