Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2006, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- I. Matrices positives
- II. Ordre de Löwner
- III. Fonctions matriciellement croissantes

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2006/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A 2006 MATH. II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$, la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$, l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n. On note 0_n, la matrice nulle.
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.
- $\mathcal{S}_n$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$, constitué des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices A qui satisfont ${}^tA = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n.
- $(X \,|\, Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X,Y) où $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaite :

$$(AX \,|\, Y) = (X \,|\, {}^tAY).$$

Définition 1. *Une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ est dite positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX \,|\, X) \geq 0$.*

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ est dite définie positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1} \backslash \{0_{n,1}\}$, $(AX \,|\, X) > 0$.

Définition 2. *Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n$, on dit que A est plus petite que B pour l'ordre de Löwner, et on note $A \preceq B$, si la matrice $B - A$ est positive. On notera $A \prec B$ si $B - A$ est définie positive.*

On suppose dorénavant que A est une matrice symétrique réelle d'ordre n.

I. Matrices positives

1) Montrer que si A est positive, alors pour toute matrice réelle $M \in \mathcal{M}_{n,p}$, la matrice ${}^tMAM$ est symétrique positive.

2) Montrer que toutes les puissances entières d'une matrice symétrique positive A sont positives.

3) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n$ est positive, respectivement définie positive, si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives, respectivement strictement positives.

4) Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice C, symétrique définie positive telle que $C^2 = A$.

5) Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2 = A$, montrer que, pour toute valeur propre λ de A, on a :

$$\text{Ker } (A - \lambda \, \mathrm{I}_n) = \text{Ker } (C - \sqrt{\lambda} \, \mathrm{I}_n).$$

6) En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$ et que dans toute base orthonormale de vecteurs propres de A, la matrice C est diagonale.

   On notera désormais $C = A^{1/2}$.

7) On suppose A définie positive. Montrer que A est inversible et qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$.

8) Prouver que $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$.

II. Ordre de Löwner

9) Montrer que l'ordre de Löwner est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.

10) Soit $B \in \mathcal{S}_n$ avec $A \preceq B$. Montrer que pour toute matrice réelle $C \in \mathcal{M}_{n,p}$, la relation ${}^tCA\,C \preceq {}^tCB\,C$ est vérifiée.

11) Montrer que si $\mathrm{I}_n \preceq A$ alors A est inversible et $A^{-1} \preceq I_n$.

12) En déduire que si $0_n \prec A \preceq B$ alors B est inversible et $B^{-1} \preceq A^{-1}$.

13) Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ soit positive.

14) On considère les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels a et b de sorte que $0_n \preceq D \preceq B$ mais que $D^2 \not\preceq B^2$.

III. Fonctions matriciellement croissantes

Soit n un entier non nul et M une matrice diagonalisable à valeurs propres positives. Il existe donc une matrice diagonale Δ et une matrice inversible P telles que $M = P\Delta P^{-1}$. Notons $(\lambda_i, i = 1, \cdots, n)$ les valeurs propres de M, répétées suivant leur multiplicité, qui sont donc les coefficients diagonaux de Δ.

Définition 3. *Si f est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et Δ une matrice diagonale positive, on note $f(\Delta)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux*

sont donnés par $f(\Delta)_{ii} = f(\lambda_i)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$.

15) On considère f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et l'on note $R = Pf(\Delta)\,P^{-1}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et λ un réel positif tels que $MX = \lambda X$. Calculer $R\,X$.

16) Montrer que, pour toutes matrices P et Q inversibles et toutes matrices diagonales Δ_P et Δ_Q de $\mathcal{M}_n$ telles que $M = P\Delta_P P^{-1} = Q\Delta_Q Q^{-1}$, on a :

$$Pf(\Delta_P)P^{-1} = Qf(\Delta_Q)Q^{-1}.$$

Désormais, si M est une matrice diagonalisable à valeurs propres positives et $M = P\Delta P^{-1}$ est une diagonalisation de M, on définit $f(M)$ par

$$f(M) = P\,f(\Delta)\,P^{-1}.$$

Définition 4. *Une fonction f est dite matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$ si pour tout $n \geq 1$ et tout couple (A, B), de matrices symétriques, l'implication suivante est satisfaite :*

$$0 \preceq A \preceq B \Longrightarrow f(A) \preceq f(B).$$

Soit E l'ensemble des fonctions φ continues sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telles que $(s \mapsto s\varphi(s))$ soit intégrable sur $[0, 1]$ et φ soit intégrable sur $[1, +\infty[$. On définit une fonction $L_\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par :

$$L_\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{st}{1+st}\,\varphi(s)\,ds.$$

17) Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_r(s) = s^{-r-1}$. Pour quelles valeurs de r a-t-on $\varphi_r \in E$? Exprimer alors, pour tout $t > 0$, $L_{\varphi_r}(t)$ en fonction de $L_{\varphi_r}(1)$.

18) Soit $s \geq 0$. On pose pour tout $t \geq 0$, $f_s(t) = 1 - \dfrac{1}{1+st}$. Exprimer $f_s(A)$ lorsque A est une matrice symétrique positive.

19) Montrer que f_s est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

20) Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n$ positive et toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, établir l'identité :

$$(L_\varphi(A)X \mid X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(A)X \mid X)\ \mathrm{d}s.$$

21) Montrer que, pour toute $\varphi \in E$, l'application L_φ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

22) Soient A et B deux matrices symétriques telles que $0 \preceq A \preceq B$. Compte-tenu des questions précédentes, pour quelles valeurs du réel positif r, pouvez-vous montrer que $A^r \preceq B^r$?

FIN DU PROBLÈME

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Logique, ensembles et applications
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Intégrales dépendant d'un paramètre

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi